https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj08-02-034
DOI: 10.30888/2663-5712.2021-08-02-034

УДК 519.21

EXISTENCE OF *l*-MOMENT OF THE STRONG SOLUTION OF STOCHASTIC INTEGRAL DIFFERENTIAL ITO-VOLTERRA EQUATION

ІСНУВАННЯ *l*-ГО МОМЕНТУ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІТО-ВОЛЬТЕРРИ

Yurchenko I.V. / Юрченко І.В.
cand. of ph.-math. sc., assoc. prof. / к.ф.-м.н., доц.
ORCID: 0000-0001-9929-5758
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
Ukraine, Chernivtsi, vul. Universitet'ska, 28, 58000
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Україна, Чернівці, вул. Університетська, 28, 58000

Анотація. *У даній роботі доведено існування l-го моменту сильного розв'язку для стохастичного інтегро-диференціального рівняння Іто-Вольтерри при наявності вінерівських збурень та пуассонівських перемикань.*

Ключові слова: *стохастичне інтегро-диференціальне рівняння, вінерівські збурення, пуассонівські перемикання,існування розв'язку.*

Вступ.

Питанню існування та єдиності розв'язку детермінованих та стохастичних (у випадку наявності вінерівських збурень) інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри присвячена праця [1]. Там же доведено марківську властивість розв'язку та досліджено питання стійкості розв'язку таких рівнянь. У працях [2—4] розвинуто методику дослідження стохастичних рівнянь Іто-Вольтерри на випадок наявності пуассонівських перемикань. Матеріал даної роботи узагальнює результати щодо існування та єдиності розв'язку, що розглядалися в роботах [1–4,7–9], на стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри спеціального вигляду (випадок l-го моменту, $l>1$).

Постановка задачі.

Розглянемо на (Ω, F, P) з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \ge t_0\}$ стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри

$$dx(t)=[a_1(t,x^t)+\int_{t_0}^{t}a_2(t,s,x^s)ds+\int_{t_0}^{t}a_3(t,s,x^s)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_U a_4(t,s,x^s,u)\times$$
$$\times\tilde{\nu}(du,ds)]dt+[b_1(t,x^t)+\int_{t_0}^{t}b_2(t,s,x^s)ds+\int_{t_0}^{t}b_3(t,s,x^s)dw(s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_U b_4(t,s,x^s,u)\tilde{\nu}(du,ds)]dw(t)+\int_U[c_1(t,x^t,u)+\int_{t_0}^{t}c_2(t,s,x^s,u)ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t}c_3(t,s,x^s,u)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_U c_4(t,s,x^s,u,u_1)\tilde{\nu}(du_1,ds)]\tilde{\nu}(du,dt); \tag{1}$$

$$x^{t_0}=\varphi^{t_0}; \tag{2}$$

де $\{x(t)\equiv x(t,\omega)\}\subset R^n$, $t\ge t_0$, $\omega\in\Omega$; $\{a_1(t,\varphi)\},\{b_1(t,\varphi)\}$ неперервні за $t\ge t_0$, $\varphi\in D_{R_+}$ відображення в R^n; D_{R_+} — простір Скорохода [5, 6] локально обмежених функцій, які є неперервними справа та мають лівосторонні границі (НПЛГ), вигляду $\varphi: R_+ \to R^n$ з нормою

$$\|\varphi\|_{D^p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p)^{1/p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s)ds)^{1/p}, \tag{3}$$

де D^p — простір D_{R_+} з нормою (3), $1 \le p < \infty$,

$$x^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \le s \le t, \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases} \tag{4}$$

$\rho: R_+ \to R_+$ – обмежена функція згладжуючої дії (див. п. 5.1.1 [2]);

$\{a_2(t,s,x^s)\}$, $\{b_2(t,s,x^s)\}$ – R^n-вимірні;

$\{a_3(t,s,x^s)\}$, $\{b_3(t,s,x^s)\}$ – $R^n \otimes R^m \otimes R^m$-вимірні;

$\{w(s)\}$ – R^m-вимірний стандартний вінерівський процес на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $G \times D^p$, де $G \equiv \{(t,s) \in [t_0,T] \times [t_0,T] : s \le t\}$);

$\{a_4(t,s,x^s,u)\}$ і $\{b_4(t,s,x^s,u)\}$, крім цього, вимірні за $u \in U \subset R^n$;

$\{c_1(t,x^s,u)\}$ – $R^n \otimes U$-вимірний,

$\{c_2(t,s,x^s,u)\}$ і $\{c_3(t,s,x^s,u)\}$ – $R^n \otimes R^m \otimes U$-вимірні,

$\{c_4(t,s,x^s,u,u_1)\}$ – $R^n \otimes R^m \otimes U \otimes U$-вимірний (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $G \times D^p \times U$);

$\{\tilde{\nu}(du,dt)\}$ – центрована пуассонівська міра з параметром $\Pi(du)dt$, яка не залежить від $\{w(t)\}$.

Нехай $\{F_t, t \ge t_0\}$ – потік σ-алгебр множин з Ω такий, що $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t,A)\}$, $A \in A$ (A – σ-алгебра множин U), F_t – вимірні $\forall t \ge t_0$. Позначимо через J^{t_0}, $t_0 \ge 0$ простір вимірних випадкових процесів $\{x(t), t \ge t_0\}$ таких, що $x^{t_0} \in D^p$ для кожного $\omega \in \Omega$ та $\{x(t)\}$ не залежить від приростів вінерівського процесу та пуассонівської міри $\{w(s) - w(t_0), s \ge t_0\}$ і $\{\tilde{\nu}(s,A) - \tilde{\nu}(t_0,A), s \ge t_0, A \in A\}$.

Означення. Стохастичний процес $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ є сильним розв'язком рівняння (1), (2) для $t \in [t_0, T]$, якщо: 1) $\{x(t)\}$ неупереджуючий [6] для $t \le T$; 2) $x^t \in D^p$ при $t \in [t_0,T]$ майже скрізь; 3) $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$ майже скрізь; 4) інтеграли від модулів a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1,4}$ скінченні. 5) для $t \ge t_0$ справджується відповідне інтегральне рівняння.

Далі позначимо для $x: R_+ \times \Omega \to R^n$ через $|x(\cdot)|_{t_0}^*(t) \equiv \sup\limits_{t_0 \le s \le t} |x(s)|$. Надалі будемо суттєво використовувати нерівності Буркгольдера [1] для довільного $l > 1$:

$$E|\int_{t_0}^t \psi_1(s)dw(s)|_{t_0}^{*l}(t) \le c_{11} E(\int_{t_0}^t |\psi_1(s)|^2 ds)^{l/2}, \tag{5}$$

$$E\left|\int_{t_0}^{t}\int_U \psi_2(s,u)\tilde{\nu}(du,ds)\right|_{t_0}^{*l}(t) \le c_{21}E\left(\int_{t_0}^{t}\int_U |\psi_2(s,u)|^2\,\Pi(du)ds\right)^{l/2}, \qquad (6)$$

для J^t-вимірного процесу $\{\psi_1(t,\omega)\}$ такого, що $\int_{t_0}^{T}\psi_1^2(t)dt<\infty$ майже скрізь та для J^t-вимірного процесу $\{\psi_2(t,u,\omega),u\in U\}$ такого, що $\int_0^T\int_U\psi_2^2(t,u)\Pi(du)dt<\infty$ майже скрізь.

Позначимо

$$R(t,x)\equiv\int_{t_0}^{t}a_1(s,x^s)ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}a_2(s,v,x^v)dvds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}a_3(s,v,x^v)dw(v)ds+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_U a_4(s,v,x^v,u)\tilde{\nu}(du,dv)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}b_1(s,x^s)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}b_2(s,v,x^v)dvdw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}b_3(s,v,x^v)dw(v)dw(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_U b_4(s,v,x^v,u)\tilde{\nu}(du,dv)dw(s)+\int_{t_0}^{t}\int_U c_1(s,x^s,u)\tilde{\nu}(du,ds)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_U\int_{t_0}^{s}c_2(s,v,x^v,u)dv\tilde{\nu}(du,ds)+\int_{t_0}^{t}\int_U\int_{t_0}^{s}c_3(s,v,x^v,u)dw(s)\tilde{\nu}(du,ds)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_U\int_{t_0}^{s}\int_U c_4(s,v,x^v,u,u_1)\tilde{\nu}(du_1,dv)\tilde{\nu}(du,ds)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{4}R_i(t,x)+\sum_{i=1}^{4}Q_i(t,x)+\sum_{i=1}^{4}S_i(t,x), \qquad (7)$$

де перша сума містить перші чотири доданки, друга — наступні чотири доданки з інтегралами за вінерівським процесом, третя — чотири доданки з інтегралами за пуассонівською мірою. Надалі будемо опускати індекс D^p у позначенні $\|\cdot\|_{D^p}$.

Лема. Нехай для функціоналів $\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\},i=\overline{1,4}$ виконується відповідна умова Ліпшиця з константою $L>0$, тоді для розв'язку $\{x(t)\}\subset R^n$ стохастичного диференціального рівняння (1), (2) справджується оцінка

$$E|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\le K_1E\|\delta^{t_0}\|^l+\bar{M}_{t_0}^{t}E|\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t),$$

де $R(\cdot,\cdot)$ визначений за формулою (7), $\delta(t)\equiv x(t)-y(t)$, $K_1=O((t-t_0)^{1/2})$, $\bar{M}_{t_0}^{t}$ залежить тільки від $t-t_0$ та $\bar{M}_{t_0}^{t}=o(1)$ при $t-t_0\to0$.

Доведення. Нехай $T>t_0$. Для $t\in[t_0,T]$ матимемо

$$E|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\le c_1\sum_{i=1}^{4}[E|R_i(t,x)-R_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+E|Q_i(t,x)-Q_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t)+E|S_i(t,x)-S_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t)],$$

де c_1 — деяка додатна стала.

З роботи [1] відомо, що:

$$E\,|\,R_1(\cdot,x)-R_1(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le (t-t_0)^{l-1}L^l E\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^s\,\|^l\,ds; E\,|\,R_2(\cdot,x)-R_2(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le$$

$$\le L^l(t-t_0)^{2l-1}E\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^l\,dv; E\,|\,R_3(\cdot,x)-R_3(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{2l-2}\times$$

$$\times E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}; E\,|\,Q_1(\cdot,x)-Q_1(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}};$$

$$E\,|\,Q_2(\cdot,x)-Q_2(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{2l-2}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}};$$

$$E\,|\,Q_3(\cdot,x)-Q_3(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і Буркгольдера (5), (6), а також лему 1.2.2 з роботи [2], можна стверджувати, що

$$E\,|\,R_4(\cdot,x)-R_4(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t^0)^{2l-2}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}.$$

Аналогічно можна одержати оцінки

$$E\,|\,Q_4(\cdot,x)-Q_4(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}.$$

Випишемо тепер нерівності для доданків $S_i(t,x)$, $i=\overline{1,4}$ із співвідношення (7)

$$E\,|\,S_1(\cdot,x)-S_1(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}};$$

$$E\,|\,S_2(\cdot,x)-S_2(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{2l-2}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}};$$

$$E\,|\,S_3(\cdot,x)-S_3(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}.$$

$$E\,|\,S_4(\cdot,x)-S_4(\cdot,y)\,|_{t_0}^{*l}\,(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}E(\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^2\,dv)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи наслідок 2В) з праці [1] та наслідок 5.2 з праці [2], доведену в праці [1, формула (2.7)] нерівність

$$\int_{t_0}^{t}\|\,\delta^v\,\|^l\,du\le$$

$$\le \tilde{k}_{l/p}[K_2(t-t_0)\,\|\,\delta^{t_0}\,\|_{\rho}^{l}+\int_{t_0}^{t}|\,\delta(u)\,|^l\,du+\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{u}|\,\delta(v)\,|^p\,\rho(u-v)dv)^{\frac{l}{p}}du]$$

і наслідок з неї:

$$(\int_{t_0}^{t} \| \delta^{v} \|^2 dv)^{l/2} \le \tilde{k}_{l/2}\tilde{k}_{\tau}^{l/2}[\overset{=}{K}^{\lambda} (t-t_0)^{l/2} \| \delta^{t_0} \| . +$$

$$+.(\int_{t_0}^{t} | \delta(v) |^2 dv)^{l/2} + (\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{v} | \delta(s) |^2 \rho(v-s)ds)^{\tau} du)^{l/2}],$$

де $\tilde{k}_{l/p}$, K_2 деякі додатні сталі, $\| \delta^{u} \|_{\rho}^{p} \equiv \int_{0}^{\infty} | \delta(u-v) |^{p} \rho(v)dv$, одержимо наступну оцінку

$$E | R(\cdot,x) - R(\cdot,y) |_{t_0}^{*l} (t) \le K_1 E \| \delta^{t_0} \|^{l} + \bar{M}_{t_0}^{t} E | \delta(\cdot) |_{t_0}^{*l} (t), \qquad (8)$$

де $\bar{M}_{t_0}^{t} = o(1)$ при $t - t_0 \to 0$. Лему доведено.

Основний результат. Теорема. Нехай

1) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1), (2) виконується умова Ліпшіца зі сталою $L > 0$ для довільних $(t,s) \in G$ та $x, y \in D^{p}$, $u \in U$;

2) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1), (2) виконується умова рівномірної обмеженості по $t \in R$ з правою частиною вигляду $L(1+\| x \|_{D^p})$;

3) існує початковий процес $x_{-} \in J^{t_0}$ такий, що

$$E \| x_{-}^{t_0} \|_{D^p}^{l} < \infty. \qquad (9)$$

Тоді існує єдиний l-ий момент $(l > 1)$ сильного розв’язку рівняння (1), (2) $\{x(t)\} \subset D^{p}$ та $E\{| x(\cdot) |_{t_0}^{*l} (T)\} < \infty$.

Доведення. *Існування.* Побудуємо x_n:

$$x_n(t) = x_{-}(t) \quad \forall t \le t_0 \quad \forall n \ge 1; \quad x_0(t) = x_{-}(t_0) \quad \forall t \ge t_0.$$

Для $n \ge 1$, $\forall t > t_0$:

$$x_n(t) = x_{-}(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_1(s, x_{n-1}^{s})ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} a_2(s,v,x_{n-1}^{v})dvds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} a_3(s,v,x_{n-1}^{v})dw(v)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{U} a_4(s,v,x_{n-1}^{v},u)\tilde{v}(du,dv)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} b_1(s,x_{n-1}^{s})dw(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} b_2(s,v,x_{n-1}^{v})dw(v)ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} b_3(s,v,x_{n-1}^{v})dw(v)dw(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{U} b_4(s,v,x_{n-1}^{v},u)\tilde{v}(du,dv)dw(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{U} c_1(s,x_{n-1}^{v},u)\tilde{v}(du,ds) + \int_{t_0}^{t}\int_{U}\int_{t_0}^{s} c_2(s,v,x_{n-1}^{v},u)dv\tilde{v}(du,ds) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{U}\int_{t_0}^{s} c_3(s,v,x_{n-1}^{v},u)dw(v)\tilde{v}(du,ds) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_U\int_{t_0}^{s}\int_U c_4(s,v,x_{n-1}^v,u,u_1)\tilde{\nu}(dv,du_1)\tilde{\nu}(du,ds). \qquad (10)$$

Тут x_{n-1}^s задається, як у (4).

З (10), умов 1)—2) теореми і леми 5.2.1 з роботи [2] випливає, що $\{x_n(t), t\ge 0\}$ — вимірний відносно σ-алгебри F_t, $x_n^t \in D^p$ $\forall t \ge t_0$.

Методом математичної індукції покажемо, що $E\| x_n^{\cdot} \|_{t_0}^{*l}(t) < \infty \quad \forall t_0 \le t \le T$. При $n=0$ маємо $x_0^{t_0} \in D^p$ і з вище побудованого $\forall t \in [t_0, T]$:

$$\| x_0^t \| = \| T^{t-t_0} x_0^{t_0} \| \le C \cdot \| x_0^{t_0} \| = C \| x_-^{t_0} \|,$$

де C — константа, яка залежить від $\overline{\overline{K}}$. Звідси $E\| x_0^{\cdot} \|_{t_0}^{*l}(T) \le C \cdot E\| x_-^{t_0} \|_{D^p}^{l} < \infty.$ Нехай виконується $E\| x_{n-1}^{\cdot} \|_{t_0}^{*l}(t) < \infty, \quad t_0 \le t \le T$. Використовуючи нерівність Гельдера, одержимо $\forall t \in [t_0, T]$:

$$E\| x_n^{\cdot} \|_{t_0}^{*l}(t) \le k_l E[| x_-(t_0) |^l + L^l (k_l (T-t_0)^l + c_l (T-t_0)^{l/2})(1 + \| x_{n-1} \|_{t_0}^{*l}(T))] < \infty,$$

де k_l, c_l — деякі сталі.

Далі, одержимо:

$$E| x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) |_{t_0}^{*l}(t) = E| R(\cdot, x_{n-1}) - R(\cdot, x_{n-2}) |_{t_0}^{*l}(t) \le \bar{M}_{t_0}^t E| x_{n-1}(\cdot) - x_{n-2}(\cdot) |_{t_0}^{*l}(t).$$

Можемо вибрати $t_1 > 0$ так, щоб $M_{t_0}^t < \frac{1}{2}$ для $t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Якщо позначимо $d \equiv E| x_1(\cdot) - x_0(\cdot) |_{t_0}^{*l}(T) < \infty$, то одержимо, що $E| x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) |_{t_0}^{*l} \le \frac{d}{2^n}, \quad t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Тоді, згідно з нерівністю Чебишова, одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{| x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) |_{t_0}^{*l}(t) > \frac{1}{n^2}\} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} E| x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) |_{t_0}^{*l}(t) \le d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2l}}{2^n} < \infty,$$

звідки, за лемою Бореля-Кантеллі [6], випливає, що ряд $x_n(t) \equiv x_-(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1}[x_k(t) - x_{k-1}(t)]$ майже скрізь монотонно збіжний на $[t_0, t_1]$. Тобто, $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ існує, неупереджуючий та F_t-вимірний на $[t_0, t_1]$.

Залишилося показати [7-9], що $\{x(t), t \le t_1\}$ є розв'язком рівняння (1), (2). Використовуючи (8), проведемо наступні оцінки:

$$E| x(\cdot) - x_-(t_0) - \int_{t_0}^{\cdot} a_1(s, x^s) ds - \ldots - \int_{t_0}^{\cdot}\int_U\int_{t_0}^{s}\int_U c_4(s,v,x^v,u,u_1) \times$$

$$\times \tilde{\nu}(dv,du_1)\tilde{\nu}(du,ds) |_{t_0}^{*l}(t) \le k_l E| x(\cdot) - x_n(\cdot) |_{t_0}^{*l}(t) +$$

$$+k_l \bar{M}_{t_0}^t E|x(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t).$$

Нагадаємо, що для $t \le t_1$ маємо $\bar{M}_{t_0}^t \le \frac{1}{2}$.

Якщо покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} E|x(\cdot)-x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)=0$, то твердження буде доведено.

Нехай $b_i \equiv i^{-2/l'}$, $l' = l/(l-1)$. Тоді, згідно з нерівністю Гельдера [7-9]

$$E|x_n(\cdot)-x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t) \le (\sum_{i=n}^{\infty} \frac{db_i^{-l}}{2^i})(\sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'})^{l-1}$$

та $|x(\cdot)-x_n(\cdot)|^{*l}(t) \le \liminf\limits_{k} |x_n(\cdot)-x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t)$, за лемою Фату [6] матимемо

$$E|x_n(\cdot)-x(\cdot)|^{*l}(t) \le d(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{b_i^{-l}}{2^i})(\sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'})^{l-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Отже, доведено існування l-го моменту F_t-вимірного розв'язку $\{x(t)\}$ для $t_0 \le t \le t_0 + t_1$.

Цей розв'язок можна розширити для довільного $t \in [t_0, T]$, використовуючи методику, що описана в [1]. Єдиність розв'язку доводиться за допомогою стандартного відомого методу [1, 5–9].

Висновки. Доведено існування *l*-го моменту сильного розв'язку для стохастичного інтегро-диференціального рівняння Іто-Вольтерри при наявності вінерівських збурень та пуассонівських перемикань. Отримані результати можна застосувати при подальших дослідженнях системи (1), (2) на стійкість.

Література

1. Mizel V., Trutzer V. Stochastic Hereditary Equations: Existence and Asymptotic Stability // Journal of Integral Equations.– 1984.– №7.– P.1—72. [Elsevier Science Publishing Co., Inc.].

2. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.- Снятин: Над Прутом, 1996.- 448 с.

3. Ясинский И.В., Ясинский В.К. Исследование стохастической задачи "свисающий паук" с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.1. Свойства решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.– 2000.– №4.– С.101–130.

4. Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Исследование стохастической задачи "свисающий паук" с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.2. Устойчивость решений СДФУ с с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.– 2000.– № 5.– С.113–139.

5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.– К.: Наук. думка, 1982.– 612 с.

6. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф., Шуренков В.М. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.– К.:

Наук. думка, 1978.– 582 с.

7. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Про існування l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерра // Доповіді НАН України.– 2004.– № 7.– С.33–39.

8. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в лінійних стохастичних динамічних системах з випадковими операторами.– Чернівці: Золоті литаври, 2009.– 237 с.

9. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Моногр. Вид. 2-е, доповнене.– Чернівці: Технодрук, 2019.– 258 с.

Abstract. *In this article the existence of l-moment of the strong solution of stochastic integral differential Ito-Volterra equation is proved in the case of Wiener disturbances and Poisson switchings.*

Keywords: *stochastic integro-differential equation, Wiener disturbances, Poisson switchings, existence of the solution.*

Стаття відправлена: 17.05.2021 г.