https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj11-02-006
DOI: 10.30888/2663-5712.2022-11-02-006

УДК 512.543

ON SYSTEMS OF GENERATORS OF AUTOMATON PERMUTATION GROUPS

ПРО СИСТЕМИ ТВІРНИХ ГРУП АВТОМАТНИХ ПІДСТАНОВОК

Sikora V.S. / Сікора В.С.
c.ph.-math..sc., doc. / к.ф.-м..н., доц.
ORCID: 0000-0002-5283-8759
Yurij Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine,
Chernivtsi, vul. Universytetska,28, 58000
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна,
Чернівці, вул. Університетська, 28, 58000

Анотація. *У статті досліджується питання побудови системи твірних для групи фінітних автоматних підстановок, доведено теорему про те, що кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи $S(n,r)$ для довільного $r \ge 2$ містить рівно r елементів.*

Ключові слова: *система твірних, група автоматних підстановок, скінченні автоматні підстановки, незвідні системи твірних.*

Вступ. Деякі початкові відомості про групи всіх автоматних підстановок над заданим алфавітом можна знайти в роботах [1–4]. Зокрема, в [3] встановлено, що їх можна конструювати з симетричних груп, використовуючи операцію вінцевого добутку, тобто при вивченні груп автоматних підстановок можна застосовувати добре розвинену теорію вінцевих добутків.

Об'єктом дослідження даної праці, яка продовжує дослідження робіт [7, 9], є питання побудови системи твірних для групи фінітних автоматних підстановок.

Постановка задачі. Допоміжні твердження. Нехай задано два автомати

$$A_1 =< Q_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 >, \ \ A_2 =< Q_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2 >$$

такі, що вхідний алфавіт другого з цих автоматів збігається з вихідним алфавітом першого (тобто, що $X_2 = Y_1$). Наведемо означення, леми та теореми з робіт [7,9], які знадобляться нам для подальших досліджень.

Означення 1 [2]. Суперпозицією $A_1 \cdot A_2$ автоматів A_1 та A_2 називається автомат $B =< Q, X_1, Y_2, \delta, \lambda >$, множина станів Q якого збігається з добутком $Q_2 \times Q_1$ множин станів автоматів A_1 та A_2. При цьому для довільного стану $q = (q_2, q_1) \in Q$ та довільного вхідного сигналу $x \in X_1$ автомата B значення функцій переходів та виходів автомата B визначаються зі співвідношень:

$$\delta(q,x) = (\delta_2(q_2, \lambda_1(q_1,x)), \delta_1(q_1,x)), \qquad \lambda(q,x) = \lambda_2(q_2, \lambda_1(q_2,x)). \qquad (1)$$

Лема 1 [6]. *Добуток автоматних відображень є автоматним відображенням. Обернене до бієктивного автоматного відображення також є автоматним.*

Таким чином, всі автоматні бієктивні відображення над алфавітом X утворюють групу, яку називають *групою автоматних підстановок* над алфавітом X і позначають $A(X)$. Згідно з вищенаведеним, маємо

$$A(X) \simeq \mathrm{Aut}\, T(X),$$

де символом $\mathrm{Aut}\, T(X)$ позначено групу автоморфізмів дерева $T(X)$.

Означення 2 [5]. Перетворення $f : X^* \to X^*$ називається фінітарним, якщо існує таке натуральне число m, що для довільного слова $\omega \in X^*$ його образ $f(\omega)$ відрізняється від ω не більше, ніж першими m літерами.

Лема 2 [5]. *Кожне фінітарне перетворення є скінченно автоматним. Усі фінітарні перетворення утворюють підгрупу в групі $K(X)$ всіх скінченно автоматних підстановок, яку позначають $F(X)$.*

Нехай $X^{(r)}$ — підмножина X^*, яка складається зі слів довжини точно r. Згідно з лемою 1.9 з [8], ця підмножина є інваріантною відносно перетворення $A(X)$, тобто можна розглянути групу перетворень $(A(X), X^{(r)})$. Якщо J_r – ядро цього перетворення, то фактор-група $A^{(r)}(X) = A(X) / J_r$ діє на $X^{(r)}$ точно. Аналогічно, фактор-групи

$$K^{(r)}(X) = K(X) / J_r \cap K(X), \qquad F^{(r)}(X) = F(X) / J_r \cap F(X)$$

також діють точно на $X^{(r)}$.

Лема 3 [9]. *Для довільного $r \in \mathbf{N}$ мають місце рівності*

$$K^{(r)}(X) = F^{(r)}(X) = A^{(r)}(X).$$

Далі, для довільного $r \in \mathbf{N}$ можна визначити природну проєкцію (епіморфізм) $\varphi_r : A^{(r+1)}(X) \to A^{(r)}(X)$, та природний мономорфізм $\psi_r : A^{(r)}(X) \to A^{(r+1)}(X)$. Тим самим задано два спектри груп: прямий $(A^{(r)}(X); \psi_r)_{r \in \mathbf{N}}$, та обернений $(A^{(r)}(X); \varphi_r)_{r \in \mathbf{N}}$. Отже, можна говорити про х граничні групи (означення див. [10]).

Лема 4 [9]. *Мають місце такі співвідношення:*

$$(i)\ \lim_{\rightarrow}(A^{(r)}(X), \psi_r) \simeq F(X); \qquad (ii)\ \lim_{\leftarrow}(A^{(r)}(X), \varphi_r) \simeq A(X).$$

Лема 5 [9]. *Для довільного $r \in \mathbf{N}$ група $(A^{(r)}(X), X^{(r)})$, $\mathrm{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) r-му вінцевому степеню симетричної групи $S(X)$. Група $(A(X), X^*)$, $\mathrm{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) вінцевому степеню $\wr_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ нескінченної послідовності симетричних груп степеня n в його інтранзитивній реалізації. Група $(K(X), X^*), \mathrm{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) обмеженому вінцевому степеню (b) $\wr_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ в його інтранзитивній реалізації. Група $(F(X), X^*), \mathrm{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) фінітарному вінцевому добутку $(F) \wr_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$.*

На групі $A(X)$ природно вводиться метрика (див. [4, 6]). А саме, якщо перетворення із $A(X)$ задаються таблицями, то відстань між ними дорівнює

η^k, де η, $(0<\eta<1)$ — фіксоване число, а k — довжина спільного початку таблиць. Тим самим група $A(X)$ перетворюється в метричну групу і є повним метричним простором.

Лема 6 [9]**.** *Підгрупа $F(X)$ є всюди щільною в підгрупі $A(X)$.*

Згідно з лемою 4, група $A^{(r)}(X)$ ізоморфна вінцевому добутку r симетричних груп степеня n $(n=(X))$: $A^{(r)}(X)\simeq \underbrace{S_n \wr S_n \wr \ldots \wr S_n}_{r} =: S(n,r)$.

Отже, $A^{(r)}(X)$ має степінь n^r і порядок $(n!)^{1+n+n^2+\ldots+n^{r-1}}$, при цьому діє на множині слів довжини r транзитивно та імпримітивно. Для кожного цілого k $(1\le k\le r)$ група $A^{(r)}(X)$ містить підгрупу k-координатних таблиць, тобто таблиць вигляду $[\varepsilon,\ldots,\varepsilon,g_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}),\varepsilon,\ldots,\varepsilon]$, яка ізоморфна n^{k-1}-му степеню симетричної групи S_n.

Розглянемо спочатку системи твірних групи $A^{(r)}(X)$, які складаються лише з координатних таблиць. Для цього в симетричній групі S_n фіксуємо деяку систему твірних $\Pi=\{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_s\}$ і розглянемо таблиці вигляду

$$u_r(\overline{x}_{k-1}^{0,l},k,\pi_l)=[\varepsilon,\ldots,\varepsilon,h_{k,l}(x_1,\ldots,x_{k-1}),\varepsilon,\ldots,\varepsilon], \qquad (2)$$

в яких

$$h_{k,l}(x_1,\ldots,x_{k-1})=\begin{cases}\pi_l, & \text{якщо} \quad (x_1,\ldots,x_{k-1})=\overline{x}_{k-1}^{0,l},\\ \varepsilon & \text{у решті випадків,}\end{cases} \qquad (3)$$

де ε – одиничний елемент групи S_n, $\overline{x}_{k-1}^{0,l}=(x_{1,l}^0,\ldots,x_{k-1,l}^0)$ — фіксований кортеж, $l=1,2,\ldots,s$, $k=1,2,\ldots,r$.

Теорема 1 [9]. *Система елементів, визначених формулами (2) та (3), є системою твірних групи $S(n,r)$ при довільному виборі кортежів $\overline{x}_k^{0,l}$ $(1\le k\le r-1,\ 1\le l\le s)$. Ця система буде незвідною тоді й тільки тоді, коли система Π буде незвідною.*

Оскільки симетрична група S_n породжується двома підстановками – такими, наприклад, будуть пари $(1,2),(1,2,\ldots,n)$ або $(1,2,\ldots,n-1)$, $(1,2,\ldots,n)$ – то група $S(n,r)$, а отже і $A^{(r)}(X)$, має незвідні системи твірних вигляду (2), які містять $2r$ підстановок.

Нагадаємо, що комутатор елементів a,b групи G визначається як $(a,b)=a\cdot b\cdot a^{-1}\cdot b^{-1}$, а підгрупа, породжена всіма комутаторами, називається *комутантом* G і позначається G'. Оскільки група G' є найменшою за включенням підгрупою такою, що фактор-група G/G' — абелева, то цю останню називають *абелізацією* групи G [7, 8]. Зокрема, комутантом симетричної групи S_n є знакозмінна група A_n, тобто абелізацією S_n буде циклічна група другого порядку. Для того, щоб описати абелізацію групи $S(n,r)$, охарактеризуємо спочатку комутант цієї групи. Нехай $\sigma=\prod f(\overline{x}_r)$ – добуток всіх значень деякої координатної функції, взятих у певному порядку.

Підстановка σ є або парною, або непарною і ця властивість не залежить від порядку множників. Із означення оператора $\prod$ випливає: (i) якщо $\prod f(\overline{x}_r) \in A_n$, то для довільної таблиці $u \in S(n,r)$ маємо $\prod f(\overline{x}_r^u) \in A_n$; (ii) якщо $\prod f(\overline{x}_r) \in A_n$ та $\prod g(\overline{x}_r) \in A_n$, то $\prod f(\overline{x}_r) g(\overline{x}_r) \in A_n$, де A_n – знакозмінна група порядку n.

Теорема 2 [9]. *Комутант* $S'(n,r)$ *містить ті й тільки ті таблиці* $[g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\overline{x}_{r-1})]$, *для яких виконується співвідношення:* $g_1 \in A_n$, $\prod g_i(\overline{x}_{i-1}) \in A_n \quad (1 \le i \le r)$.

Основний результат. При виконанні умов доведених у роботах [7, 9] лем 1–6 та теорем 1, 2, можна довести наступні твердження.

Теорема 3. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи* $S(n,r)$ *для довільного* $r \ge 2$ *містить рівно* r *елементів.*

Доведення. Нехай $m(S(n,r))$ — мінімально можлива кількість твірних групи $S(n,r)$. Доведемо спочатку, що $m(S(n,r)) \ge r$. Розглянемо абелізацію $G = S(n,r) / S'(n,r)$ групи $S(n,r)$ і покажемо, що вона є елементарною абелевою 2-групою рангу r.

Дійсно, для кожної таблиці $u = [g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\overline{x}_{r-1})]$ маємо

$$u^2 = [g_1^2, g_1(x) \cdot g_1(x_1^u), ..., g_r(\overline{x}_{r-1}) \cdot g_r(\overline{x}_{r-1}^u)].$$

Оскільки $g_1^2 \in A_n$ та $\prod g_i(x_{i-1}) g_i(x_{i-1}^u) \in A_n$, то $u^2 \in S'(n,r)$, тобто образ таблиці u при природному гомоморфізмі $S(n,r) \to S(n,r) / S'(n,r)$ є елементом порядку 2. Значить, G — елементарна абелева.

Далі, оскільки кожну координатну функцію $f(\overline{x}_k)$ можна розкласти на добуток $f = g \cdot h$ двох функцій таких, що $\prod g(\overline{x}_k) \in A_n$, а $h(\overline{x}_k)$ набуває неодиничного значення не більше ніж в одній точці, то кожну таблицю $v = [f_1, f_2(x_1), ..., f_r(\overline{x}_{r-1})] \in S(n,r)$ можна розкласти на добуток

$$v = [g_1, g_2(x_1), ..., g_r(\overline{x}_{r-1})] \cdot [h_1, h_2(x_1), ..., h_r(\overline{x}_{r-1})],$$

перший множник якого належить $S'(n,r)$, а координатами другого є функції, які набувають неодиничного значення не більше ніж в одній точці. Звідси випливає, що абелізація $S(n,r) / S'(n,r)$ породжується образами r координатних таблиць вигляду $[\varepsilon, ..., \varepsilon, \tilde{h}_k(\overline{x}_{k-1}), \varepsilon, ..., \varepsilon]$, де $\tilde{h}_k(\overline{x}_{k-1})$ набуває тільки одного неодиничного значення і є непарною підстановкою. Таким чином, ранг абелізації дорівнює r, тому довільна система твірних групи $S(n,r)$ містить не менше ніж r елементів. Вкажемо тепер систему твірних $S(n,r)$, яка складається рівно з r елементів. Для випадку $r = 2$ справджується теорема 2.5 [8]. У ній встановлено, що $S(n,2)$ породжується такими двома таблицями: $u = [g_1, g_2(x_1)]$, $v = [h_1, h_2(x_1)]$, де: *(i)* якщо $n -$ парне, $n > 2$, тоді $g_1 = (1, 2, ..., n)$, $h_1 = (1, 2, ..., n-1)$,

$$g_2(x_1) = \begin{cases} (1, 2, ..., n-1) \text{ при } x_1 = 1, \\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків,} \end{cases} \qquad h_2(x_1) = \begin{cases} (1, 2, ..., n) \quad \text{при} \quad x_1 = n, \\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків;} \end{cases}$$

(ii) якщо n — непарне, $n>2$, тоді $g_1=(1,2,...,n)$, $h_1=(1,2)$, $g_2(x_1)=(1,2)$,

$$h_2(x_1)=\begin{cases}(1,2) & \text{при } x_1=1,\\ (1,2,...,n) & \text{при } x_1=3,\\ \varepsilon & \text{в решті випадків;}\end{cases}$$

(iii) якщо $n=2$, тоді $g_1=(1,2)$, $h_1=\varepsilon$, $g_2(x_1)=\varepsilon$,

$$h_2(x_1)=\begin{cases}(1,2) & \text{при } x_1=1,\\ \varepsilon & \text{в решті випадків.}\end{cases}$$

Нехай тепер $r>2$. Скористаємося індукцією по r. Припустимо, що група $S(n,r)$ породжується r таблицями $w_i=[f_1^{(i)},f_2^{(i)}(x_1),f_3^{(i)}(x_1,x_2),...,f_r^{(i)}(\overline{x}_{r-1})]$ $(i=1,2,...,r)$ і побудуємо систему твірних групи $S(n,r+1)$, яка складається з $r+1$ таблиць. Для цього продовжимо кожну з таблиць w_i до таблиці $\tilde{w}_i$ довжини $r+1$, дописуючи $(r+1)$-у координату, яка дорівнює ε $(1\le i\le r)$ і додамо до цієї системи таблицю $\tilde{w}_{r+1}=[\varepsilon,...,\varepsilon,h_{r+1}(\overline{x}_r)]$, де функція $h_{r+1}(\overline{x}_r)$ визначається так:

(j) якщо n – парне, тоді

$$h_{r+1}(\overline{x}_r)=\begin{cases}(1,2,...,n-1), \text{ якщо } \overline{x}_r=(1,0,0,...,0),\\ (1,2,...,n), \text{ якщо } \overline{x}_r=(0,1,0,...,0),\\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків;}\end{cases}$$

(jj) якщо n – непарне, тоді

$$h_{r+1}(\overline{x}_r)=\begin{cases}(1,2), \quad \text{якщо } \overline{x}_r=(1,0,0...,0),\\ (1,2,...,n), \quad \text{якщо } \overline{x}_r=(0,1,0,...,0),\\ \varepsilon \quad \text{в решті випадків.}\end{cases}$$

Отже, для довільного n можна підібрати такі натуральні числа $k,t,$ щоб $\tilde{w}_{r+1}^k=[\varepsilon,...,\varepsilon,g_{r+1}^{(1)}(\overline{x}_r)]$, $\tilde{w}_{r+1}^t=[\varepsilon,...,\varepsilon,g_{r+1}^{(2)}(\overline{x}_r)]$, і функції $g_{r+1}^{(j)}(\overline{x}_r)$, $j=1,2,$ набували неодиничного значення (рівного $(1,2,...,n-1)$ і $(1,2,...,n)$ або, відповідно, $(1,2)$ і $(1,2,...,n)$) тільки в одній точці. Оскільки через таблиці $w_i(i=1,2,...,r)$ виражаються всі координатні таблиці з системи твірних (4.2), а $\tilde{w}_{r+1}^k$ і $\tilde{w}_{r+1}^t$ самі мають потрібний вигляд, то звідси випливає, що так побудована система $\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,...,\tilde{w}_r,\tilde{w}_{r+1}$ є системою твірних групи $S(n,r+1)$. Теорему 3 доведено.

Теорема 3 допускає природне узагальнення на випадок довільних метасиметричних груп скінченного рангу. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 4. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних метасиметричної групи* $S(n_1,n_2,...,n_r)$ *(*$n_i\ge 2$ *для* $i=1,2,...,r$*) довільного скінченного рангу* $r\ge 2$ *містить рівно* r *елементів.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 3, можна показати, що

$$|S(n_1,n_2,...,n_r)/S'(n_1,n_2,...,n_r)|\ge r,$$

тобто $m(S(n_1,n_2,...,n_r))\ge r$. А тому досить побудувати систему твірних групи

$S(n_1, n_2, ..., n_r)$, яка складається з r елементів. Така побудова, як і при доведенні попередньої теореми, здійснюється індуктивно. При $r = 2$ потрібні системи твірних побудовано в теоремі 2.5 [8]. Якщо ж $r > 2$, то до системи твірних групи $S(n_1, n_2, ..., n_{r-1})$, яка складається із $(r-1)$-го елемента, слід додати ще одну таблицю вигляду $w_r = [\varepsilon, ..., \varepsilon, h_r(\overline{x}_{r-1})]$, де функція $h_r(\overline{x}_{r-1})$ визначається так:

1') якщо n_r – парне, то

$$h_r(\overline{x}_{r-1}) = \begin{cases} (1, 2, ..., n_r - 1), & \text{якщо} \quad \overline{x}_{r-1} = (1, 0, 0, ..., 0), \\ (1, 2, ..., n_r), & \text{якщо} \quad \overline{x}_{r-1} = (0, 1, 0, ..., 0), \\ \varepsilon & \text{в решті випадків;} \end{cases}$$

2') якщо n_r – непарне, то

$$h_r(\overline{x}_{r-1}) = \begin{cases} (1, 2), & \text{якщо} \quad \overline{x}_{r-1} = (1, 0, 0, ..., 0), \\ (1, 2, ..., n_r), & \text{якщо} \quad \overline{x}_{r-1} = (0, 1, 0, ..., 0), \\ \varepsilon & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Усі перевірки здійснюються аналогічно, як і при доведенні теореми 3 і ми їх опускаємо. Теорему 4 доведено.

Висновки. Досліджено системи твірних груп автоматних підстановок, які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів довжини r ($r \in \mathbf{N}$) над цим алфавітом. Результати, одержані в роботі, можна застосувати для подальшого дослідження груп, індукованих автоматними підстановками на множині слів довжини r, а також нових серій систем твірних груп автоматних підстановок.

Література

1. Холл М. Теория групп.– М.: Изд-во иностр. лит., 1962.– 468 с.
2. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук.– 1961.– 16, №5.– С.3–63.
3. Заровный В.П. Автоматные подстановки и сплетения групп // Кибернетика.– 1965.– №1.– С.29–36.
4. Чекань Б., Гечеч Ф. О группе автоматных подстановок // Кибернетика.– 1965.– №1.– С.29–36.
5. Сущанський В.І. Групи автоматних підстановок // Доповіді НАН України.– 1998.– №6.– С.47–50.
6. Chillag D., Herzog M., Mann A. On the Diameter of a Graph Related to Conjugacy Classes of Groups // Bull. London Math. Soc.– 1993.– Vol.25.– P.255–262.
7. Сикора В.С., Сущанский В.И. Системы порождающих групп автоматных подстановок // Кибернетика и системный анализ.– 2000.– №3.– С.121–133.
8. Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок. Монографія.– Чернівці: Технодрук, 2018.– 168 с.

9. Sikora V.S. Minimal Generators Systems for Groups of Automatic Permutations // International Scientific Periodical Journal "SWorldJournal".– 2021.– Issue 7, Part 2.– P.48-55.– Published by: SWorld & D.A. Tsenov Academy of Economics – Svishtov, Bulgaria.– DOI: 10.30888/2663-5712.2021-07-02-014.
10. Курош А.Г. Теория групп.– М.: Наука, 1967.– 648 с.

Abstract. *Systems of induced generating actions of automaton permutation groups on words of length r are investigated. A family of irreducible systems of generators is constructed, and the cardinality of such systems is found to be related with r. The theorem is proved that arbitrary minimal (on quantity of the elements) system of generators of the* $S(n,r)$*-group consists of* r *elements,* $r \geq 2$.

Key words: *system of generators, automaton permutation groups, finite automaton permutations, irreducible systems of generators.*

Стаття відправлена: 14.01.2022 г.