https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj11-02-021
DOI: 10.30888/2663-5712.2022-11-02-021

УДК 519.217, 519.718

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF DIFFUSION STOCHASTIC DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL SYSTEMS WITH A SMALL PARAMETER UNDER THE ACTION OF EXTERNAL RANDOM VARIABLES

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Yasinsky V.K. / Ясинський В.К.
d.p.-m.s., prof. / д.ф.-м.н., проф.
ORCID: 0000-0001-5434-6427
Doroshenko I.V. / Дорошенко І.В.
c. p.-m.s., as.prof. / к. ф.-м.н., доц.
ORCID: 0000-0001-8729-1768
Chernivtsi National University, Chernivtsi, Kotsyubynskoho 2, 58012
Чернівецький національний університет, Чернівці, вул.Коцюбинського 2, 58012

Анотація. *В роботі розглянуто усереднення у стохастичних диференціальних рівняннях без післядії під дією зовнішніх фіксованих випадкових величин. Потім ця техніка доведень перенесена на усереднення для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин (СДФРВВ).*

Ключевые слова: *стохастичні диференціальні рівняння, зовнішні збурення, квазілінійні стохастичні системи з малим параметром.*

Вступ.

У багатьох математичних моделях реальних технічних систем рівняння наближення не є «жорстким», тобто малі збурення параметрів можуть привести як до асимптотичної стійкості, так і до нестійкості стану рівноваги.

Для їх дослідження у детермінованому випадку добре зарекомендував себе метод усереднення Боголюбова-Митропольського-Крилова-Самойленка [1]. Цей метод виявився дієвим і для аналізу випадкових збурень.

Вперше на слабку компактність мір для розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) з малим параметром звернув увагу І.І. Гіхман [2]. Наступним ваговим внеском у розвиток методу усереднення для рівнянь з випадковими параметрами є монографія Р.З. Хасминського [11]. Тут розроблений апарат аналізу нормованих відхилень від розв'язку рівняння усередненого руху.

На рівняння зі скінченою та нескінченою післядією згадані вище результати розповсюджені у монографії Є.Ф. Царкова, В.К. Ясинського [10].

В даній роботі проведено опис та обґрунтування алгоритму побудови повністю спрощених рівнянь для квазілінійних стохастичних систем з малим параметром $\varepsilon > 0$.

1. Усереднення для СДР без післядії з врахуванням зовнішніх збурень типу випадкових величин

Найбільш ідеалізованою формою СДР з малим параметром під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин на базовому ймовірнісному просторі $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \boldsymbol{P})$ є СДРВВ вигляду

$$dx(t,\omega) = \varepsilon[\varphi(\omega)a(t,x(t,\omega)dt + \psi(\omega)b(t,x(t,\omega)dw(t,\omega)] \qquad (1.1)$$

з початковою умовою

$$x(t_0,\omega) = x_0(\omega), \qquad (1.2)$$

де $t \in R_+, x(t,\omega): [0,\infty) \times \Omega \to R^1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $w(t,\omega): [0,\infty) \times \Omega \to R^1$ - скалярний стандартний вінерівський процес; $\varphi(\omega), \psi(\omega): \Omega \to R^1$ - зовнішні незалежні випадкові величини від $w(t,\omega)$ зі скінченими другими моментами

$$E\{\varphi^2(\omega)\} \leq K_1 < \infty;\ E\{\psi^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty. \qquad (1.3)$$

У подальшому виклад в цьому пункті слідує монографіям [2], [10].

Припустимо, що

I) функції $a(t,x), b(t,x)$ вимірні за сукупністю змінних [2], [10];

II) функції $a(t,x), b(t,x)$ задовольняють модифіковану глобальну умову Ліпшиця вигляду

$$K^*[|a(t,x) - a(t,y)|^2 + |b(t,x) - b(t,y)|^2] \leq L|x-y|^2, \qquad (1.4)$$

де $K^* = \max\{K_1, K_2\}$;

III) функції $a(t,x), b(t,x)$ задовольняють умову рівномірної обмеженості в нулі

$$K^*[|a(t,0)|^2 + |b(t,0)|^2] \leq d^2 < \infty;$$

IV) незалежні $\varphi(\omega)$ та $\psi(\omega)$ від $w(t,\omega)$ задовольняють умову (1.3).

Сильний розв'язок СДРВВ (1.1), (1.2) позначимо $x(t,s,x)$, де $x(s) = x$ - початковий розв'язок $x(t,\omega)$ (1.1), (1.2).

V) В якості початкових даних $x(s,\omega)$ слідує брати випадкові величини, які володіють другим моментом

$$E\{x^2(0,\omega)\} \leq K_3 < \infty, \qquad (1.6)$$

вимірні відносно σ-алгебри $\mathcal{F}$ та незалежні від $w(t,\omega)$.

VI) Працюємо з $\mathcal{F}_t$ - мінімальною σ-алгеброю, відносно якої вимірні прирости $(t,\omega) - w(s,\omega), t > s \geq 0$, на відрізку $[0,T]$ та яка містить $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{F}_0$.

Зауваження 1.1. Процес $x(t,s,x;\omega)$ узгоджений з потоком $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ для всіх $\mathcal{F}_0$ -вимірних x, φ, ψ та $t > s \geq 0$ [10].

Припустимо, що рівномірно по $S \geq 0$ та x з довільної кулі фіксованого радіуса існує з ймовірністю одиниця границя

$$P\left\{\omega: \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_S^{S+T}\varphi(\omega)\,a(t,x)dx = \bar{a}(x,\omega)\right\} = 1. \qquad (1.7)$$

Означення 1.1. Випадкове диференціальне рівняння

$$d\bar{x}(t,\omega) = \varphi(\omega)\bar{a}(\bar{x},\omega)dt \qquad (1.8)$$

назвемо рівнянням випадкового усередненого руху (1.1), (1.2).

Наступний результат з врахуванням зовнішніх випадкових збурень можна знайти у другій частині монографії [2].

Теорема 1.1. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \boldsymbol{P})$ задано СДРВВ (1.1), (1.2), яке задовольняє умовам I)-VI), та крім цього:

VII) функція $a(t,x)$ двічі неперервно диференційована по x, причому друга похідна задовольняє умову Ліпшиця рівномірно по x, а саме

$$\left|\frac{\partial^2 a(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a(t,y)}{\partial y^2}\right| \leq L|x-y|; \qquad (1.9)$$

VIII) для будь-якого розв'язку (1.8) $\bar{x}(t,\omega)$ для всіх $t \in [0,T]$ виконується співвідношення з ймовірністю 1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \varphi(\omega)\left[a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau,\omega)\right) - \bar{a}(\bar{x}(\tau,\omega))\right]d\tau = 0, \qquad (1.10)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\quad \int_0^t \varphi(\omega)\,\Delta a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau,\omega)\right)d\tau = \int_0^t g(\tau,\omega)\,d\tau; \qquad (1.11)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\quad \int_0^t \psi(\omega)\left[b\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau,\omega)\right)b^T\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}(\tau,\omega)\right)d\tau = \int_0^t f(\tau,\omega)f^T(\tau,\omega)d\tau\,; \qquad (1.12)$$

де $f(\tau,\omega)$ - неперервні по τ матричні функції з ймовірністю 1.

Тоді при $\varepsilon\to 0$ нормована різниця

$$\eta_\varepsilon(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\varphi(\omega)x\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \bar{x}(0)\right) - \bar{x}(t,\omega)\right] \qquad (1.13)$$

слабо збігається з ймовірністю 1 до розв'язку η лінійного неоднорідного стохастичного рівняння

$$d\eta(t,\omega) = \varphi(\omega)g(t,\omega)\eta(t,\omega)dt + \psi(\omega)f(t,\omega)dw(t,\omega), \qquad (1.14)$$

де $w(t,\omega)$ - стандартний n-вимірний випадковий процес [5].

Теорема 1.2. Нехай виконанні умови I-VII теореми 1.1., а замість умови VIII виконується глобальна модифікована умова Ліпшиця II-III, існує (1.8) з умови VI та, при достатньо малих $\varepsilon > 0$ та $\forall\, t \geq 0$ має місце нерівність

$$K_1^2\left|\int_0^t a(\tfrac{s}{\varepsilon}, \bar{x}))ds - \int_0^t \bar{a}\big(\bar{x}(s)\big)ds\right|^2 \leq c_1(\varepsilon,t)(|\bar{x}(0)|^2 + \alpha^2), \qquad (1.15)$$

причому для кожного $t \geq 0$ $\lim_{\varepsilon\to\infty} c_1(\varepsilon,t) = 0$.

Тоді існує така функція $g_1(\varepsilon,T)$, що при деякому $\varepsilon_0 > 0$ та довільних

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), T > 0$ виконується нерівність

$$E\left\{\sup_{0\le t\le \frac{T}{\varepsilon}} \left|x\big(t,0,\bar{x}(0)\big) - \bar{x}(\varepsilon t)\right|^2\right\} \le g_1(\varepsilon, T)(|\bar{x}(0)|^2 + \alpha^2), \quad (1.16)$$

причому при кожному $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon, T) = 0. \quad (1.17)$$

Доведення. Напочатку, використовуючи мартингальну властивість стохастичного інтеграла [5], запишемо нерівність

$$E\left\{\sup_{0\le\tau\le t} \left|x\big(t,0,\bar{x}(0)\big) - \bar{x}(\varepsilon t)\right|^2\right\}$$

$$\le 2\varepsilon^2\left\{\sup_{0\le\tau\le t}\left|\int_0^\tau K_1[a(s,\bar{x}(\varepsilon s)) - \bar{a}\big(\bar{x}(\varepsilon s)\big)]ds\right|^2\right\} +$$

$$+4\varepsilon^2 K_2\int_0^t E\left\{\left|b\big(s,x(s)\big)\right|^2\right\}ds + 2\varepsilon^2 K_1 Lt\int_0^t E\left\{\sup_{0\le s\le\tau}\left|x\big(s,0,\bar{x}(0)\big) - \bar{x}(\varepsilon s)\right|^2\right\}ds. \quad (1.18)$$

Для розв’язку (1.1), (1.2) нескладно отримати оцінку [10]

$$\sup_{0\le s\le\tau} E\{\left|x\big(s,0,\bar{x}(0)\big)\right|^2 \le g_2(\varepsilon, t)(|\bar{x}(0)|^2) + \alpha^2), \quad (1.19)$$

причому для всіх $T > 0$ при деякому $c > 0$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_2\left(\varepsilon, \frac{\tau}{\varepsilon}\right) = C(T). \quad (1.20)$$

Тому при деякому $Q > 0$ та $\forall\, T > 0$ та достатньо малому $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\varepsilon}K_2\ \ [E\{\left|b\big(s,x(s)\big)\right|^2\}ds \le QT(|\bar{x}(0)|^2 + \alpha^2). \quad (1.21)$$

Залишилось з врахуванням отриманих (1.19)-(1.21) застосувати до (1.18) лему Гронуолла та результат (1.15) випливає з рівномірно обмежена нерівності (1.18), якщо покласти в (1.16) $t = T/\varepsilon$. Теорема доведена.

Теорема 1.3. (Як наслідок теореми 1.2). Нехай

А) в умовах теореми 1.2 $a(t, x) = A(t)x$, матриця $A(t)$ рівномірно обмежена

$$\sup_{0\le t\le T} A(t) < c_1; \quad (1.22)$$

В) задовольняє умові Ліпшиця по t

$$K_2\|A(t_1)-A(t_2)\| \le L_1|t_1-t_2|; \tag{1.23}$$

C) має місце граничне співвідношення

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{S\ge 0}\left\|\frac{1}{T}\int_S^{S+T} K_1(A(t)dt-\bar{A})\right\| = 0; \tag{1.24}$$

D) для $\psi(\omega)b(t,x)$ виконуються умови теореми 1.3 з ймовірністю 1 з $\alpha = 0$.

Тоді для кожного $T > 0$ та всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ віконуєься нерівність

$$E\{\sup_{0\le t\le\frac{T}{\varepsilon}}\left|x(t,0,\bar{x}(0))-\bar{x}(\varepsilon t)\right|^2\} \le g_1(\varepsilon,T,|\bar{x}(0)|^2,K_1,K_2), \tag{1.25}$$

причому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon,T,K_1,K_2) = 0. \tag{1.26}$$

Доведення. Нерівність (1.16) випливавє із співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left|K_1\int_0^t[\left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right)]e^{\bar{A}s}ds\right| = 0. \tag{1.27}$$

При кожному фіксованому $T > 0$ для довільного $\delta > 0$ можна вибрати таке число $\Delta \ge 0$, що матрична функція $\exp(\bar{A}s)$ буде відрізнятися від кусково-сталої функції $f(t) = \exp(\bar{A}kA)$ при $t \in [k\Delta,(k+1)\Delta), k = 0,1,2,\dots$ [10]

Тоді очевидна нерівність

$$\int_0^t \left\|A\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right\|\cdot\left\|e^{\bar{A}s}-f(s)\right\|ds \le c\delta t,$$

а в силу довільності $\delta > 0$ достатньо показати, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t[\left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right)f(s)ds\right\| \le c_1\cdot\Delta \tag{1.28}$$

при деякому $c_1 > 0$.

Твердження теореми 1.3 буде доведено, якщо при фіксованих $T > 0$ та $\Delta > 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{[\frac{T}{\Delta}]}\left\|\int_0^t K_1\left(A\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right)ds\right\|\cdot\|f_k\| = 0,$$

де $[\cdot]$ - ціла частина числа.

Далі слідує довести співвідношення

$$\left\|\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} K_1\left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right)ds\right\| = \left\|\varepsilon\int_{\frac{[k\Delta]}{\varepsilon}}^{\left(\frac{k\Delta}{\varepsilon}\right)+\Delta} K_1[A(\tau)-\bar{A}]d\tau\right\| \le$$
$$\le K_1\Delta \sup_{s\ge 0}\left\|\frac{\varepsilon}{\Delta}\int_{s}^{s+1/\varepsilon}[A(\tau)-\bar{A}]d\tau\right\| \to 0 \qquad (1.29)$$

при $\varepsilon \to 0$ та кожному $\Delta > 0$ за умовою (1.27).

Тому очевидно, що при $\varepsilon \to 0$

$$\sum_{k=0}^{[\frac{T}{\Delta}]}\left\|\int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} K_1\left(A\left(\frac{S}{\varepsilon}\right)-\bar{A}\right)ds\right\| \le TK_1\sup_{s\ge 0}\left\|\frac{\varepsilon}{\Delta}\int_{s}^{s+1/\varepsilon}[A(\tau)-\bar{A}]ds\right\| \to 0.$$

Звідки відразу випливає (1.26) з врахуванням (1.27)-(1.30). Теорема доведена.

2. Усереднення у СДФР з врахуванням зовнішніх збурень типу випадкових величин

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}_t, t\ge 0\}, \boldsymbol{P})$ задано СДФР при випадкових зовнішніх збуреннях

$$dx(t,\omega) = \varepsilon[\varphi(\omega)a(t,x_t)dt + \psi(\omega)b(t,x_t)dw(t,\omega)] \qquad (2.1)$$

за початковою умовою

$$x(t+\theta) = \beta(\theta)|_{t=0} \text{ при } \theta\in[-r;0]. \qquad (2.2)$$

Тут $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}$ при $\theta\in[-r;0]$; $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$- вимірні відображення $R_+\times D \to R^n$, що задовільняють глобальну модифіковану умову Ліпшиця (1.4) з II) та умову рівномірної обмежаності (1.5) з III).

Будемо використовувати рівномірну метрику

$$\|\alpha\| = \sup_{-r\le\theta\le 0}|\alpha(\theta)|. \qquad (2.3)$$

Інші позначення співпадають з позначеннями пункту 1.

Для $\alpha\in D([-r;0])$ позначимо на функцію $\hat{\alpha} \equiv \alpha(0)$.

$$\hat{x}_t = x(t) \text{для всіх } \theta\in[-r;0].$$

Поряд з СДФРВВ (2.1) розглянемо рівняння

$$dy(t,\omega) = \varepsilon[\varphi(\omega)\hat{a}(t,y(t,\omega)dt + \psi(\omega)\hat{b}(t,y(t,\omega)dw(t,\omega)] \qquad (2.4)$$

за початковими умовами (2.2).

Тут $\hat{a}(t,y(t)) \equiv a(t,\hat{y}_t)$; $\hat{b}(t,y(t)) \equiv b(t,\hat{y}_t)$; $\varphi(\omega),\psi(\omega)$ - попарно незалежні випадкові величини від вінеревського процесу $w(t,\omega)$ на $t\in[0,\infty)$.

Нехай виконуються умови I-VII пунтка 1 та існує

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{s}^{s+T} K_1\hat{a}(t,x)dt = \breve{a}(x). \qquad (2.5)$$

Поряд з СДФРВВ (2.4) розглянемо рівняння усередненого руху

$$\frac{d\bar{x}(t,\omega)}{dt} = \varphi(\omega)\breve{a}(\bar{x}(t,\omega)) \tag{2.6}$$

або

$$d\bar{x}(t) = K_1\breve{a}\big(\bar{x}(t)\big), \tag{2.7}$$

де $K_1 \equiv \sup_{\omega\in\Omega}|\varphi(\omega)|$.

Перш ніж оцінити нормовану різницю

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big[x\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \alpha\right) - x\big(t, 0, \alpha(0)\big)\Big]. \tag{2.8}$$

доведемо допоміжне твердження.

Теорема 2.1. Якщо виконуються умови (1.4), (1.5) припущень II,III пунтку 1, то для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha \in D[-r; 0]$, $K_1, K_2 > 0$ та $T > 0$ для різниці розв'язків (1.1), (2.4) має місце нерівність

$$E\{\sup_{0\le s\le T} K^*|x(t,0,\alpha) - y(t,0,\alpha(0))|^2\} \le g(\varepsilon, T, K^*)\varepsilon^2(\|\alpha\| + \beta^2), \tag{2.9}$$

де $g(\varepsilon, T, K^*)$ задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} g(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*) = c(T) < \infty. \tag{2.10}$$

Доведення. Для скорочення запису введемо позначення [10]

$$x(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{якщо } t \in [-r; 0]; \\ x(t, 0, \alpha), & \text{якщо } t > 0; \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{якщо } t \in [-r; 0]; \\ y(t, 0, \alpha(0)), & \text{якщо } t > 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

СДР (2.4) слідує розуміти, як стохастичне функціональне рівняння Гіхмана-Іто, а саме: для $\forall\, t > 0$ ($\forall t \in [0, T]$)

$$y(t,\omega) = y(0) + \int_0^t \varphi(\omega)\hat{a}\big(s, y(s,\omega)\big)ds + \psi(\omega)\int_0^t \hat{b}\big(s, y(s,\omega)\big)dw(s,\omega) \tag{2.12}$$

при початковій умові (2.2).

Використовуючи відому нерівність $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$ [10], мартингальну властивість стохастичного інтегралу [5], умову Ліпшиця (1.4) та умову рівномірної обмеженності (1.5) можна отримати нерівність

$$E\{\sup_{0\le t\le\tau}|y(t,\omega)|^2\} \le 3[|\beta(0)|^2 + 2\varepsilon^2\tau(\tau+4)K_1\beta^2 +$$

$$+ 2\varepsilon^2(L/K^*)(\tau+4)\int_0^\tau \quad E\{\sup_{0\le t\le s}|y(t,\omega)|^2\}ds. \tag{2.13}$$

Застосовуючи лему Гроноулла, отримаємо з (2.13) наступну нерівність

$$E\{\sup_{0\le t\le T}|y(t,\omega)|^2\} \le g_1\left(\varepsilon, \frac{T}{\varepsilon}, K^*\right)(|\beta(0)|^2 + \alpha^2), \tag{2.14}$$

де $\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*) = c_1(T, K^*) < \infty$ для всіх $T \ge 0$.

Аналогічно (2.14) обчислимо $\sup_{\substack{-r\le\tau\le 0\\ r<t\le T}} |y(t+\tau,\omega)|^2$ та, взявши матиматичне сподівання $E\{\cdot\}$, отримаємо

$$E\{\sup_{\substack{-r\le\tau\le 0\\ r<t\le T}} |y(t+\tau,\omega)|^2\} \le g_2\left(\varepsilon, \frac{T}{\varepsilon}, K^*\right)(|\beta(\omega)|^2 + \alpha^2), \qquad (2.15)$$

де $\lim_{\varepsilon\to 0} g_2(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*) = c_2(T, K^*) < \infty$.

Об'єднавши дві нерівності (2.14), (2.15), згідно (2.13) отримаємо

$$E\{\sup_{\substack{-r\le\tau\le 0\\ r<t\le T}} |y(t+\tau,\omega) - y(t,\omega)|^2\} \le$$

$$\le 3\varepsilon^2(r+4)r\alpha^2 + 6\varepsilon^2\left(\frac{L}{K^*}\right)(r+4)rg_1(\varepsilon, T, K^*)(|\beta(0)|^2 + \alpha^2) =$$

$$\varepsilon^2 g_2(\varepsilon, T, K^*)(|\beta(0)|^2 + \alpha^2). \qquad (2.16)$$

Далі можна приступити до доведення нерівності (2.9)

Неважко, використовуючи вище наведену техніку, отримати для розв'язку $x(t,\omega)$ рівняння (2.1) нерівність типу (2.14).

А отже для всіх будемо мати нерівність

$$E\{\sup_{0\le t\le\tau} |y(t,\omega) - x(t,\omega)|^2\} \le 3\tau\varepsilon^2 K_1^2 \int_0^\tau E\{|a(s,y_s) - a(s,\hat{y}_s)|^2\}ds +$$

$$+12\varepsilon^2 K_2^2 \int_0^\tau E\{|b(s,y_s) - b(s,\hat{y}_s)|^2\}ds \le$$

$$\le 3\,\varepsilon^2(T+4)L/K^* E\{\sup_{\substack{-r\le\tau\le 0\\ r\le t\le T}} |y(t+\tau,\omega) - y(t,\omega)|^2\} + 2rK_1\ E\{\sup_{-r\le s\le r} |y(s)|^2\} +$$

$$+3\varepsilon^2\left(\frac{T}{K^*}+4\right)K_2 \int_0^t \quad E\{\sup_{0\le t\le s} |y(t,\omega) - x(t,\omega)|^2\}ds.$$

Далі, застосовуючи для вище отриманої нерівності, лему Гронуолла отримаємо нерівність (2.9). теорема 2.1 доведена.

Теорема 2.1 та результати пункту 1 дадуть наступне твердження.

Теорема 2.2. Нехай виконані умови теореми 2.1 та крім того:

А) відображення $a(t,\beta)$ двічі неперевно диференційоване за Фреше за другим аргументом, причому друга похідна задовольняє умову Ліпшиця рівномірно по t

$$\left|\frac{\partial^2 a(t,\beta_1)}{\partial \beta_1^*} - \frac{\partial^2 a(t,\beta_2)}{\partial \beta_2^*}\right| \le L_1 \|\beta_2 - \beta_1\|, \tag{2.17}$$

В) для довільного розв'язку (2.6) при всіх $t \in [0, T]$ виконується співвідношення:

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t K_1 [a\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau\right) - \breve{a}(\bar{x}(\tau))] = 0\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} K_1 \int_0^t \nabla\hat{a}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}(\tau)\right) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_0^T K_2^2 [b(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau) b^T(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{\bar{x}}_\tau) = \int_0^t f(\tau) f^T(\tau) d\tau,$$

де $g(t)$ та $f(t)$ - неперевні матричні функції, індекс "T" означає транспонування, $\hat{a}(t,x) \equiv a(t,\hat{\beta})\big|_{\beta(0)=x}$.

Тоді при $\varepsilon \to 0$ нормована різниця слабо збігається до розв'язку неоднорідного стохастичного рівняння

$d\eta(t,\omega) = \varphi(\omega) g(t) \eta(t,\omega) + \psi(\omega) f(t) dw(t,\omega).$

Висновки.

В пункті 1 обгрунтовано усереднення для СДР без післядії під дією зовнішніх випадкових величин. В пункті 2 сформульовані достатні умови усереднення для СДФР зі скінченною післядією під дією зовнішніх збурень типу виадкових величин. Результати носять теоретичний характер.

Література:

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории неленейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1962. – 412.

2. Гихман И.И.,Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - Киев: Наук.думка,1968. - 354с.

3. Гихман И.И.,Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. - Киев: Наукова думка,1982. - 612 с.

4. Голець О.Б. Асимптотика решений квазилинийных дифференциально-функциональных уравнений со случайными параметрами // Канд. дис. Рига, 1990. – 103 с.

5. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 782 с.

6. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. - Киев:Наук.думка,1987. - 328 с.

7. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. - К.: Изд-во Киевского ун-та, 1961. - 216 с.

8. Скороход А.В. Лекции по теории случайных процессов / А.В. Скороход. – Киев: Из-во Либідь, 1990. – 168 с.

9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально - функционалных уравнений. - Рига: Зинатне, 1989. - 421 с.

10. Царьков Е.Ф.,Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально - функциональные уравнения. - Рига: Ориентир, 1992. - 328 с.

11. Хасьминский Р.З. Устойчивость ситем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука,1969. - 367 с.

Abstract. *The paper considers averaging in stochastic differential equations without aftereffects under the action of external fixed random variables. Then this technique of proofs is transferred to averaging for stochastic differential-functional equations under the action of external perturbations of the type of random variables (SDFRRV).*

Key words: *stochastic differential equations, external perturbations, quasilinear stochastic systems with small parameter.*

Стаття відправлена: 18.01.2022 г.