https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj11-02-056
DOI: 10.30888/2663-5712.2022-11-02-056

УДК 629.1.04

METHOD AND ERROR ESTIMATION OFDECISIONS IN DETERMININGAND OF OBJECTSI N SPACE
МЕТОДИ ОЦІНКИ ПОХИБКИ РІШЕНЬ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ОБ'ЄКТІВ В ПРОСТОРІ

Myronenko O.V./Мироненко О.В.
Higher education teacher
ORCID: 0000-0002-3763-5478
Military Institute of telecommunication and informatization named after Heroes Krut;
Військовий університет телекомунікацій і інформатизації імені Героїв Крут

Анотація. *В роботі розглянуто методи оцінки похибки рішень засобів обробки навігаційних даних, так званні однокрокові методи, на прикладах ,метода Єйлера, метода Рунге-Кутта які можна застосовувати, для глобальних навігаційних супутникових систем (ГНСС) визначення місцезнаходження об'єктів, аерокосмічних систем високої роздільної здатності для отримання інформації про Землю, створення високопродуктивних засобів отримання просторової інформації в режимі реального часу.*

Ключові слова: *однокрокові методи без подвійного перерахунку, метод Єйлера, метод Рунге-Кутта*

Вступ. Розглянемо методи, які дозволяють оцінювати похибки рішень без застосування подвійного перерахунку. Це дуже важливо при застосуванні цих методів, коли обчислюються і уточнюються координати, які були передані з супутника, так як збільшується точність вимірювань. Найбільш простим однокроковим методом, який потребує мінімальних затрат обчислювальних ресурсів, але дає змогу обчислювати результат із порівняно низькою точністю, є метод Эйлера.

Метод Эйлера, крім значної похибки зрізання часто буває нестійким (малі локальні помилки призводять до значного збільшення глобальної).

Цей метод можна вдосконалити різними способами. Найбільш відомі два з них: виправлений метод Ейлера і модифікований метод Ейлера (в літературі зустрічаються інші назви цих методів, наприклад, модифікований метод Ейлера й удосконалений метод ламаних).

Це методи другого порядку, їх похибка має третій степінь, що досягається покращенням апроксимації похідної. Ідея полягає у спробі зберегти або оцінити член другого порядку у формулі Тейлора. Ще більш висока точність може бути досягнута при обчисленні вищих похідних і збереженні більшої кількості членів ряду Тейлора. Такими методами є методи Рунге – Кутта.

Принцип, на якому побудований модифікований метод Ейлера, можна пояснити, користуючись рядом Тейлора і зберігаючи в ньому член з h^2. Апроксимація другої похідної $y''(x_0)$ здійснюється кінцевою різницею

$$y''(x_0) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h} \qquad (1)$$

Аналогічно обчисленню другої похідної в кінцево – різницевому вигляді можна обчислити більш високі похідні: значення n-ї за значеннями попередньої (n-1)-ї.

Метод Рунге – Кутта дає набір формул для обчислення координат внутрішніх точок, які потрібні для реалізації цієї ідеї. Оскільки існує ряд способів знаходження цих точок, то метод Рунге –Кутта об'єднує цілий клас методів для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку.

Найбільш простим однокроковим методом, який потребує мінімальних затрат обчислювальних ресурсів, але дає змогу обчислювати результат із порівняно низькою точністю, є метод Ейлера.

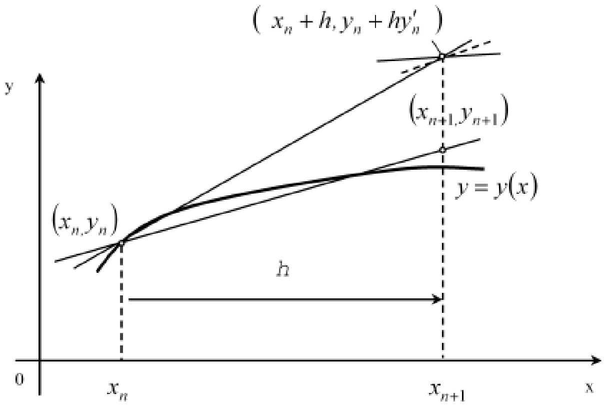

Рисунок 1- Модифікованний метод Єйлера

Найбільш розповсюджений класичний метод четвертого порядку точності:

Метод Ейлера і його модифікації (рис.1) ще називають методами Рунге – Кутта першого і другого порядку. Метод Рунге – Кутта має значно більш високу точність, що дозволяє збільшити крок розв'язання. Його максимальну величину визначає припустима похибка. Такий вибір часто здійснюється автоматично і включається як складова частина в алгоритм, побудований за методом Рунга – Кутта.

Будь-яку з формул однокрокових методів можна використовувати для розв'язання систем диференціальних рівнянь і диференціальних рівнянь вищих порядків.

Для опису складних динамічних процесів використовують системи диференціальних рівнянь. Найбільше розповсюдження отримали системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (2)$$

Для однозначного розв'язку цієї системи задають початкові умови:

$$\begin{cases} y_1(a) = y_1^0 \\ y_2(a) = y_2^0 \\ \ldots \\ y_n(a) = y_n^0 \end{cases} \quad (3)$$

Ця система рівнянь з наведеними початковими умовами називається задачею Коші для системи n диференціальних рівнянь першого порядку. У векторному вигляді вона записується так:

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(a) = \bar{y}^0 \end{cases} \qquad (4)$$

У формулах однокрокових методів для розв'язку такої задачі Коші потрібно лише перейти до векторної форми. Наприклад, формули метода Рунге-Кутта 4-го порядку розв'язку задачі Коші для системи n диференціальних рівнянь першого порядку мають вигляд:

$$y_k(x_{i+1}) = y_k(x_i) + \frac{1}{6}\left(\eta_{1k}{}^i + 2\eta_{2k}{}^i + 2\eta_{3k}{}^i + \eta_{4k}{}^i\right) \qquad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_{1k}^i &= h \cdot f_k(x_i, y_1(x_i), \ldots, y_n(x_i)) \\ \eta_{2k}^i &= h \cdot f_k(x_i + \frac{h}{2}, y_1(x_i) + \frac{\eta_{11}^i}{2}, \ldots, y_n(x_i) + \frac{\eta_{1n}^i}{2}), \\ \eta_{3k}^i &= h \cdot f_k(x_i + \frac{h}{2}, y_1(x_i) + \frac{\eta_{21}^i}{2}, \ldots, y_n(x_i) + \frac{\eta_{2n}^i}{2}) \\ \eta_{4k}^i &= h \cdot f_k(x_i + h, y_1(x_i) + \eta_{31}^i, \ldots, y_n(x_i) + \eta_{31}^i) \end{aligned} \qquad (6)$$

$k = \overline{1, n}$ – номер рівняння,

$i = \overline{0, m}$ – номер вузла, $x_0 = a$.

Формули Рунге – Кутта для цього випадку мають вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + k \text{ і } z_{n+1} = z_n + l, \qquad (7)$$

де

$$k = \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \text{ а } l = \frac{l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3}{6}$$

$$k_0 = hz_0, \qquad l_0 = hg(x_n, y_n, z_n),$$

$$k_1 = h\left(z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \quad l_1 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$k_2 = h\left(z_0 + \frac{l_2}{2}\right), \quad l_2 = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{l_2}{2}\right),$$

$$k_3 = h\left(z_0 + \frac{l_3}{2}\right), \quad l_3 = hg(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3).$$

Раніше було відзначено, що помилка зрізання при використанні методу Рунге – Кутта n-го порядку $\Delta \leq ch^{n+1}$. Обчислення верхніх границь для коефіцієнта c являє собою складну задачу, пов'язану з необхідністю оцінки ряду додаткових параметрів. Існує декілька способів для оперативного обчислення c. Найбільшого поширення набув екстраполяційний метод Річардсона (ще його називають методом Рунге), коли послідовно знаходять значення y_n з кроком h і з кроком $\frac{h}{2}$, а після цього прирівнюють отримані величини та визначають c з рівняння:

$$y_n^{(h)} + ch^{n+1} = y_n^{\left(\frac{h}{2}\right)} + c\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \qquad (9)$$

що відповідає точному значенню y_n.

Висновки і заключення.

Можна виділити загальні риси однокрокових методів:

1. Щоб отримати інформацію у новій точці, потрібно мати дані лише в одній попередній точці. Цю властивість називають "самостартуванням".
2. В основі всіх однокрокових методів лежить розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, що містять степені до k включно. Ціле число k називається порядком методу. Похибка на кроці має порядок $k+1$.
3. Всі однокрокові методи не вимагають обчислення похідних – обчислюється лише сама функція, але можуть вимагатися її значення в декількох проміжних точках.

Література

1. Аналіз похибок позиціонування наземних об'єктів засобами супутникової навігації./ Зв'язок Наукове видання .Державний університет телекомунікацій.-Київ,2019 №5 стр. 3-7.
2. Супутникова геодезія./ Шумаков Ф.Т. – Х.:, ХНАМГ
3. Н.Т.Дехтярук, В.М.Черевик, О.В.Охріменко .Аналіз похибок позиціонування наземних обєктів засобами супутникової навігації.Звязок.Наукове видання.Державний університет телекомунікацій.-Київ, 2019, № 5, стр.3-7.

Abstract.*The methodsof estimation of errors of solutions of navigational data processing tools (so-called one-step methods, on the examples of Metoda Eiler, method a Runge-Kutta, which can be used, for global navigational satellite systems (GSS) determination of the location of objects, aerospace systems of high resolution to obtain information about the Earth, creation of high-performance means of obtaining spatial information in real time.*