https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj23-00-027
DOI: 10.30888/2663-5712.2024-23-00-027

УДК 539.3

ON THE ISSUE OF SPLITTING MULTIPLE FREQUENCIES OF FREE OSCILLATIONS OF THE ROTOR ON THE ELASTIC SHAFT

ДО ПИТАННЯ РОЗЩЕПЛЕННЯ КРАТНИХ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РОТОРА НА ПРУЖНОМУ ВАЛУ

Meish Y.A. / Мейш Ю.А.
d.t.s., prof. / д.т.н., проф.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7492-700X
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, H.Oborony, 12, 03041
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, г.Оборони, 12, 03041
Belova M.A. / Бєлова М.О.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0546-8094
c.ph. and m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.
State University of Trade and Economics, Kyiv, Kyoto, 19,02156
Державний торговельно-економічний університет, Київ, Кіото, 19, 02156

Анотація. *Тонкостінні ротори мають складну геометричну форму, викликану розгалуженістю їх меридіонального перетину і поєднання в одну систему оболонок від'ємної гаусової кривини, циліндричних і конічних оболонок, а також дисків, лопаток і кілець. В статті розглянуто питання щодо впливу значення кутової швидкості ротора на частоти його вільних коливань та на форми цих коливань, проаналізовано також зв'язок між значеннями цих частот та критичними швидкостями обертання, при яких вал, що несе ротор, випучується. На конкретному прикладі було проведено теоретичне дослідження та зроблені висновки, що обертання пружного ротору призводить до розщеплення його кратної частоти, при цьому одна із розщеплених частот зменшується на величину кутової швидкості, а друга зростає на цю величину. Форма коливань ротора приймає вигляд, в якому його рух здійснюється із постійною швидкістю по колу в напрямку обертання ротору для меншої із розщеплених частот і центр рухається по колу проти напрямку обертання для більшої із розщеплених часто. Сталі величини, в яких одна із частот власних коливань ротору, який обертається, перетворюється в нуль, є критичними. В них рівноважний стан ротору стає нестійким. Розглянутий приклад має важливе практичне призначення, оскільки він може бути моделлю статичної та динамічної поведінки ротору турбіни, який приєднано до середини пружного валу що обертається.*

Ключові слова: *тонкостінні ротори, рівняння коливань, критичні величини, вільні коливання, кратні частоти, рівняння рівноваги.*

Вступ.

Тонкостінні ротори є найбільш відповідальними робочими елементами турбоустановок. Зазвичай вони мають складну геометричну форму, викликану розгалуженістю їх меридіонального перетину і поєднання в одну систему оболонок від'ємної гаусової кривини, циліндричних і конічних оболонок, а також дисків, лопаток і кілець. В турбобудуванні широко зустрічаються задачі про коливання та стійкість роторів, що обертаються. Розглянемо питання про аналіз впливу значення кутової швидкості ротора на частоти його вільних коливань та на форми цих коливань. Проаналізуємо також зв'язок між значеннями цих частот та критичними швидкостями обертання, при яких вал, що несе ротор, випучується.

Основний текст.

Розглянемо систему із двома ступенями вільності. Нехай ротор масою m утримується в недеформованому стані на пружному валу.

Сполучним з його центром мас початок системи координат Oxy, яка зв’язана з площиною переміщення мас і може обертатися разом з нею відносно точки O з кутовою швидкістю ω. Складемо рівняння рівноваги ротору маси m на площині. В системі координат Oxy що обертається, вони мають вигляд однорідної системи:

$$\begin{cases} m\omega^2 x - kx = 0, \\ m\omega^2 y - ky = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

де k – коефіцієнт пружної жорсткості валу в точці прикріплення ротору.

Очевидно, що при довільній кутовій швидкості ω ротор може залишатися в стані рівноваги $x=0,\ y=0.$ Але, значення $\omega_{кр} = \sqrt{k/m}$, як і в системі з одним ступенем вільності є критичним, оскільки в цьому випадку система (1) вироджується. Для аналізу стійкості стану рівноваги в перед критичному та за критичному станах необхідно проаналізувати рух ротору в положенні $x=0,\ y=0.$ В цьому випадку рух ротору, якій обертається є складним і це необхідно врахувати при підрахунку сил інерції. Тому рівняння коливань приймають форму:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x - 2m\omega\dot{y} = 0, \\ m\ddot{y} + (k - m\omega^2)y + 2m\omega\dot{x} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

При виведенні рівнянь (1) та підрахунку сил інерції враховано прискорення Кориоліса [1]:

$$\vec{a}^c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r = 2\omega\vec{k}\times(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = 2\omega(\dot{x}\vec{i} - \dot{y}\vec{j}), \tag{3}$$

де i, j – орти осей $Ox,\ Oy$.

Підкреслимо, що прискорення (3) приводить до включення в (2) кососиметричних складових із швидкостями $\dot{x}, \dot{y}$, які роблять її системою гіроскопічного типу. Система (2) ілюструє відмінність коливань мас, що обертаються та не обертаються. Так, якщо ротор не обертається і $\omega = 0$, то вона приводиться до виду:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0, \\ m\ddot{y} + ky = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Коливання центру мас ротору вздовж осей x та y є не пов'язаними і відбувається з рівними (кратними) частотами $\beta_0 = \sqrt{k/m}$. Однак, коли система починає обертатися з кутовою швидкістю ω, рухи вздовж осей x та y стають зв'язаними, і вони описуються зв’язаною системою рівнянь (2). При цьому форми коливань одержують якісні зміни, оскільки ротор у відповідності із рівнянням (2) зможе здійснювати тільки обертові рухи.

Дійсно, система (4) допускає два розв’язки з формами коливань із однаковими фазами.

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 \sin \beta_0 t, \\ y_1(t) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 0, \\ y_2(t) = C_2 \sin \beta_0 t. \end{cases} \tag{5}$$

Безпосередньої підстановкою упевнюємося, що рівняння (2) коливань мас, що обертаються, не дозволяють розв'язків у формі (5). У зв'язку із цим будемо шукати його у вигляді:

$$\begin{cases} x = C_1 \sin \beta t, \\ y = C_2 \cos \beta t. \end{cases} \tag{6}$$

Підставляючи (6) в (2), одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \left(k - m\omega^2 - m\beta^2\right) C_1 + 2m\omega\beta C_2 = 0, \\ 2m\omega\beta C_1 + \left(k - m\omega^2 - m\beta^2\right) C_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

для визначення C_1, C_2.

Вона має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці коефіцієнтів її правих частин дорівнює 0, тобто має місце характеристичне рівняння:

$$m^2 \beta^4 - 2(k + m\omega^2) m\beta^2 + (k - m\omega^2)^2 = 0. \tag{8}$$

Позначимо $\beta^2 = B$ та перепишемо (8) у формі:

$$m^2 B^2 - 2(k + m\omega^2) mB + (k - m\omega^2)^2 = 0. \tag{9}$$

Рівняння (9) має корені:

$$B_{1,2} = \frac{(k + m\omega^2) \pm 2\omega\sqrt{km}}{m} = \beta_0^2 + \omega^2 \pm 2\beta_0\omega$$

або

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_0 + \omega, \\ \beta_2 = \beta_0 - \omega. \end{cases} \tag{10}$$

Таким чином, для ротору, що обертається на площині, є дві частоти β_1 та β_2, які співпадають та дорівнюють β_0 при $\omega = 0$ і приймають різні значення (розщеплюються)) при ω>0, причому різница між значеннями цих частот зростає із ростом ω і завжди дорівнює 2ω.

Побудуємо форми коливань, які відповідають кожній із знайдених частот β_1 и β_2. Для цього підставимо спочатку значення $\beta_1 = \beta_0 + \omega$, наприклад, в перше рівняння системи (7).

Одержимо:

$$-2\omega(\beta_0 + \omega) C_1 + 2\omega(\beta_0 + \omega) C_2 = 0.$$

Це рівняння має рішення

$$C_1 = C_2 = C. \tag{11}$$

З його допомогою на основі рівності (6) будується форма руху центру мас ротора в площині, яка перпендикулярна до осі обертання:

$$\begin{cases} x = C\sin(\beta_0 + \omega)t, \\ y = C\cos(\beta_0 + \omega)t = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Рівності (12) свідчать про те, що для цієї форми коливань центр мас здійснює рух по колу радіусу *C* на площині *Oxy,* яка обертається із постійною швидкістю $\beta_0 + \omega$ та має напрям, протилежний до напряму обертання ротору. Такий рух назвемо зворотною регулярною прецесією [1, 2] .

Побудуємо тепер форму руху для частоти β_2. Підставимо знову $\beta = \beta_0 - \omega$ в перше рівняння системи (7). Одержимо:

$$2\omega(\beta_0 - \omega)C_1 + 2\omega(\beta_0 - \omega)C_2 = 0.$$

Це рівняння має розв'язок при $C = C_1 = -C_2$.

Для нього форма:

$$\begin{cases} x = C\sin(\beta_0 - \omega)t, \\ y = -C\cos(\beta_0 - \omega)t. \end{cases} \tag{13}$$

На відміну від попереднього випадку тут центр має здійснює рух на площині по колу радіусу *C* з постійною кутовою швидкістю $\beta_2 = \beta - \omega$ в напрямку, що співпадає із напрямком обертання площини. Такий рух має назву прямої регулярної процесії.

Проаналізуємо зв'язок критичної рівноваги у стані $x=0$, $y=0$ із значеннями частот β_1, β_2 власних коливань. Критичні стани при $\omega = \omega_{кр}$ частота β_2, дорівняє $\beta_0 \; / \; -\omega_{кр} = \sqrt{k/m} - \sqrt{k/m}$, приймає нульове значення. У зв'язку із цим рівність нулю частоти β_2 може служити динамічним критерієм появи критичного стану [3] .

Висновки.

Тепер на основі розглянутого прикладу можемо зробіть важливі висновки.

1. Обертання пружного ротору призводить до розщеплення його кратної частоти, при цьому одна із розщеплених частот зменшується на величину кутової швидкості, а друга зростає на цю величину, тому різниця між значеннями розщеплених частот завжди дорівнюватиме 2ω.

2. Форма коливань ротора приймає вигляд, в якому його рух здійснюється із постійною швидкістю по колу в напрямку обертання ротору для меншої із розщеплених частот (пряма регулярна прецесія) і центр рухається по колу проти напрямку обертання для більшої із розщеплених часто (зворотна регулярна прецесія).

3. Сталі величини, в яких одна із частот власних коливань ротору, що обертається, перетворюється в нуль, є критичними. В них рівноважний стан ротору стає нестійким.

Розглянутий приклад має важливе практичне призначення, оскільки він може бути моделлю статичної та динамічної поведінки ротору турбіни, який приєднано до середини пружного валу що обертається, пружна податливість в центрі якого характеризується величиною *k*. В такій турбосистемі проявляються всі означені вище особливості зміни частот і форми коливань та появи критичних станів.

Література:

1. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // J. Sound and Vibr. –2001. – 246, № 3 - P. 491-504. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3649
2. Meish V.F., Meish Yu.A., Arnauta N.V. Numerical Analysis of Unsteady Oscillations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Variable Geometries // Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N 4. – P. 426 – 433. DOI: 10.1007/s10778-019-00962-2
3. Meish V.F., Meish Yu.A., Belova M.A. Nonstationary Dynamics of Elliptic Isotropic Conical Shells under Distributed Loads // Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N 4. – P. 424 – 431. DOI: 10.1007/s10778-020-01026-6

Abstract. *Thin-walled rotors have a complex geometric shape caused by the branching of their meridional cross-section and the combination of shells of negative Gaussian curvature, cylindrical and conical shells, as well as disks, blades and rings into one system. The main section of the article deals with the problem of the influence of the angular speed of rotation of the rotor on the frequency of its free oscillations. It is shown that the rotation of the rotor is accompanied by the effect of splitting its multiple frequencies and the generation of precessional forms of oscillations. The relationship between these frequencies and critical rotation speeds has been established. It was concluded that the rotation of the elastic rotor leads to the splitting of its multiple frequency, while one of the split frequencies decreases by the amount of angular velocity, and the second increases by this amount. The shape of the rotor oscillations takes the form in which its movement is carried out at a constant speed in a circle in the direction of rotation of the rotor for the lower of the split frequencies and the center moves in a circle against the direction of rotation for the higher of the split frequencies. The constant values in which one of the frequencies of natural oscillations of the rotating rotor becomes zero are critical. In them, the equilibrium state of the rotor becomes unstable. The considered example has an important practical purpose, as it can be a model of static and dynamic behavior of a turbine rotor, which is attached to the middle of an elastic rotating shaft.*

Key words: *thin-walled rotors, equations of oscillations, critical quantities, free oscillations, multiple frequencies, equations of equilibrium.*

Стаття надіслана: 18.01.2024 р.