https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj25-00-007
DOI: 10.30888/2663-5712.2024-25-00-007

УДК 517.2

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUSHY PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS OF SHILOV-TYPE

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТИПУ ШИЛОВА

Unguryan G.M./ Унгурян Г.М.
c.t.s.,as. / к. ф.-м.н., ас.
ORCID: 0000-0002-8687-4504
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,
Chernivtsi, Universytets'ka, 28, 58002
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Університетська, 28, 58002

Анотація. *В роботі розглядається новий клас* $PSh_{\mu\geq 0}^{\alpha_*}$ *параболічних систем рівнянь із частинними похідними й змінними молодшими коефіцієнтами скінченної гладкості, що містить клас* $PSh_{\mu\geq 0}^{\infty}$ *і клас Петровського систем першого порядку за часовою змінною із незалежними від просторової змінної коефіцієнтами групи старших членів, а також, класи Шилова й Житомирського параболічних систем з невід'ємним родом. Досліджується фундаментальний розв'язок задачі Коші, а також основні властивості досліджуваного класу.*

Ключові слова: *задача Коші, обмежена гладкість, змінні коефіцієнти, фундаментальний розв'язок.*

Вступ.

Для подальшого розвитку теорії параболічних систем із змінними коефіцієнтами є опис якомога ширших класів параболічно стійких систем, які б охоплювали та розширювали класи Петровського та Шилова і дозволяли класичними засобами успішно будувати для них теорію крайових задач, зокрема, задачі Коші. Один з таких класів у 1960р. описав Я.І. Житомирський, вдало використовуючи групу старших і молодших членів. Він оснастив кожну параболічну за Шиловим систему зі сталими коефіцієнтами матричним диференціальним виразом із змінними коефіцієнтами, тобто, групою молодших членів, порядок якого підпорядкував спеціальним умовам, які забезпечують параболічну стійкість таких систем до зміни молодших коефіцієнтів. Цей клас гармонічно розширює і доповнює клас Шилова систем із сталими коефіцієнтами і клас Петровського систем із змінними коефіцієнтами. Такі системи Я.І. Житомирський назвав параболічними типу Шилова системами із змінними коефіцієнтами і для них, методом послідовного наближення встановив коректну розв'язність задачі Коші в класі гладких обмежених функцій. Подальше розвинення теорії задачі Коші для систем Житомирського потребувало побудови фундаментального розв'язку та його всебічного вивчення, що і досліджено у даній статті.

Основний текст.

Нехай

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x),(t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \qquad (1)$$

де $u := col(u_1,....,u_m)$, із диференціальними виразами

$$P_0(t;i\partial_x) = \sum_{|k|_+ \le p} A_{0,k}(t)\partial_x^k, P_1(t,x;i\partial_x) = \sum_{|k|_+ \le p_1} A_{1,k}(t;x)\partial_x^k$$

порядків відповідно p_0, p_1, у яких

$A_{0,k}(t) := i^{|k|_+}(a_{0,k}^{lj}(t))_{l,j=1}^m, A_{0,k}(t;x) := i^{|k|_+}(a_{1,k}^{lj}(t;x))_{l,j=1}^m$ – матричні коефіцієнти. При цьому вважатимемо, що відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x)u(t;x), (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є параболічною за Шиловим на множині $\Pi_{(0;T]}$, з показником параболічності $h, 0 \le h \le p$, родом $\mu \ge 0$, зведеним порядком p_0, а порядок p_1 групи молодших членів задовольняють спеціальну умову:

(А) $0 \le p_1 < h - n(1 - h\mu / p_0) - \gamma, 0 \le \mu$, у якій $\gamma := (m-1)(p-h)$.

Вважатимемо, що виконуються наступні умови для системи (1):

(Б): якщо коефіцієнти $a_{0,k}^{lj}(t), a_{1,k}^{lj}(t;x)$ є неперевними за змінною t рівномірно стосовно змінної x, диференційовними за змінною x до порядку α_* включно і обмеженими разом із своїми похідними комплекснозначними функціями в $\Pi_{[0;T]}$.

(С): якщо виконується умова (В), при цьому коефіцієнти $a_{1,k}^{lj}(t;x)$ є неперервно диференційовними за змінною x до порядку α_* включно.

Означення.

Сукупність усіх параболічних типу Шилова систем із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом μ, для яких виконується умова (С) назвемо класом параболічних типу Шилова систем із змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості (порядку α_*) й невід'ємним родом μ, та позначимо символом $PSh_{\mu \ge 0}^{\alpha_*}$.

Такі системи в [1,2] запропоновано називати параболічними системами типу Шилова із змінними коефіцієнтами порядку p, зведеного порядку p_0, з показником параболічності h, невід'ємним родом μ та порядком групи молодших членів p_1.

Розглянувши систему (2) та подіявши на цю систему перетворенням Фур'є за змінною x, одержимо відповідну двоїсту за Фур'є лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\partial_t v(t;\xi) = (P_0(t;\xi)v)(t;\xi), (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{3}$$

у якій $v := F[u]$.

Нехай $\Theta_\tau^t(\xi) := (\Theta_\tau^{tij}(\xi))_{i,j=1}^m$ – розв'язок системи (3) для всіх $\tau \in [0;T), t \in (\tau;T], \xi \in \mathbb{R}^n$, який задовольняє початкову умову $\Theta_\tau^t(\xi)|_{t=\tau} = E$ у звичайному розумінні (тут E – одинична матриця порядку m), тобто матрицант цієї системи. Неперервність коефіцієнтів системи (2) забезпечують існування такого матриканта у вигляді матричного функціонального ряду

$$\Theta_\tau^t(\xi) := E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \dots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} P_0\left(t_j;\xi\right) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1,$$

який при кожному фіксованому $\xi \in \mathbb{R}^n$ абсолютно і рівномірно збігаються відносно t на кожному відрізку $[a;b] \subset (\tau;T], \tau \in [0;T)$, при чому будь-який розв'язок системи має вигляд

$$v(t;\xi) = \Theta_0^t(\xi)c,$$

де c – деяка матриця-стовбець з елементами, залежними від лише від ξ [4].

Позначимо через $G(t,\tau;\cdot), 0 \le \tau < t \le T,$ ФРЗК (фундаментальний розв'язок задачі Коші) для системи (2). Параболічність системи (2) забезпечує існування розв'язку у вигляді

$$G(t,\tau;\cdot) = F^{-1}[\Theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(\cdot,\xi)\}\Theta_\tau^t(\xi)d\xi, \tag{4}$$

а також його диференційовність на множині $\Pi_{(\tau;T]}, \tau \in \left[0;T\right)$, за змінною t та нескінченну диференційовність за просторовою змінною.

Правильне таке твердження[2]:

$$\exists\left\{c,B,\delta\right\} \subset \left(0;+\infty\right) \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \forall \tau \in \left[0;T\right) \forall t \in \left(\tau;T\right] \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\,\partial_x^k G(t,\tau;x)| \le c\left(t-\tau\right)^{-\frac{n+|k|_+ +\gamma}{h}} B^{|k|_+} \,|\,k\,|_+^{\frac{1}{h}|k|_+} e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{5}$$

(тут $\gamma := (m-1)(p-h)$ і $\alpha := \mu / p_0$.)

Звідси, зокрема, випливає, що при кожних фіксованих t і τ фундаментальний розв'язок $G(t,\tau;\cdot)$ є елементом класу $P\left(S_{1-\alpha}^{1/h}\right)$, де $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ ще один простір типу S Гельфанда І.М. та Шилова Г.Є. Більше цього, елементи матричної функції $G(t,\tau;\cdot-\xi)$ є сильно диференційовними у просторі $S_{1-\alpha}^{1/h}$ один раз за змінною t на проміжку $\left(\tau;T\right]$ на нескінченну кількість разів за ξ на $\mathbb{R}^n$, а також виконується граничне співвідношення [3]

$$G(t,\tau;\cdot) \xrightarrow[t\to\tau+0]{} \delta\left(\cdot\right)E \tag{6}$$

($\delta\left(\cdot\right)$ – дельта-функція Дірака).

Означення.

ФРЗК для системи (1) назвемо функційну матрицю $Z(t,x;\tau,\xi)$ розмірності $m \times m,$ визначену для всіх $(t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}$ і залежну від параметричної точки $(\tau;\xi) \in \Pi_{[0;T)}$ таку, що:

1) Z стосовно $(t;x)$ задовольняє систему (1) на множині $\Pi_{(\tau;T]}, \tau \in \left[0;T\right)$;
2) Виконується граничне співвідношення

$$Z(t,x;\tau,\cdot)\xrightarrow[t\to\tau+0]{}\delta(\cdot-x)E$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі $S^{/}$ розподілів Л.Шварца.

У [1] методом П.Леві побудовано ФРЗК для системи (1) із класу $PSh^{\infty}_{\mu\ge 0}$ у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=G(t,\tau;x-\xi)+W(t,x;\tau,\xi),(t,x;\tau,\xi)\in\Pi^2_T, \qquad (7)$$

де $W(t,x;\tau,\xi):=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy$ – об’ємний потенціал, а

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=\sum_{l=1}^{\infty}K_l(t,x;\tau,\xi) \qquad (8)$$

його густина, яка є розв’язком інтегрального рівняння

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=K_1(t,x;\tau,\xi)+\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy. \qquad (9)$$

Тут $K_1(t,x;\tau,\xi):=P_1(t,x;i\partial_x)G(\tau,t;x-\xi)$,

$$K_l(t,x;\tau,\xi)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\beta,y)K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)dy,l>1, \qquad (10)$$

повторні ядра. При цьому встановлено, що умова (А) та обмеженість коефіцієнтів системи (1) забезпечують абсолютну і рівномірну збіжність функціонального ряду (9) для всіх $(x,\xi)\subset\mathbb{R}^n, t\in(\tau;T],\tau\in[0,T)$, а також виконання для суми Ф та повторних ядер K_l оцінок

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)|\le c_1(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)}e^{-\delta_1\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad (11)$$

$$\left|K_l(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_0^l\left(\prod_{j=1}^{l-1}c_{(j\varepsilon)}B(\alpha_0,j\alpha_0)\right)\left(t-\tau\right)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)}e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, із оціночними сталими, не залежними від $t,x;\tau,\xi$. Тут $\alpha_0:=1+\alpha n-(n+p_1+\gamma)/h>0$, а $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функція Ейлера.

Зазначимо, що оцінки (5) та (11) при $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $0\le\tau<t\le T$ забезпечують абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W. Таким чином, матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначається формулою (7) на множині Π^2_T.

Задача полягає у з’ясуванні умов, за яких матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ буде ФРЗК для системи (1) із класу $PSh^{\alpha^*}_{\mu\ge 0}$ та дослідженні основних властивостей цієї функції.

Важливими є наступні оцінки для подальшого дослідження:

$$e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}\leq e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \qquad (12)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}}{\left((t-\beta)(\beta-\tau)\right)^{\alpha n}}dy\leq\frac{c_{\varepsilon}e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{(t-\tau)^{\alpha n}},\delta>0 \qquad (13)$$

(тут $\{x,y,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\beta\in(\tau;t),0\leq\tau<t\leq T,\varepsilon\in(0,1),\delta>0,$ а величина c_{ε} залежить лише від ε).

Для подальшого дослідження гладкості функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ та властивостей її похідних, необхідно оцінити похідні повторних ядер K_l.

Висновки.

Був розглянутий новий клас $PSh_{\mu\geq0}^{\alpha^*}$ параболічних рівнянь типу Шилова з родом $\mu\geq0$ та коефіцієнтами скінченної гладкості, який містить відомий клас $PSh_{\mu\geq0}^{\infty}$, що охоплює та істотно розширює клас Петровського систем першого порядку за часовою змінною із незалежними від просторової змінної коефіцієнтами групи старших членів, а також класи Шилова й Житомирського параболічних систем з невід'ємним родом.

Був отриманий методом П.Леві фундаментальний розв’язок задачі Коші для систем з досліджуваного класу; були описані умови мінімальної гладкості для коефіцієнтів системи, що забезпечують існування та регулярність цього розв'язку.

Література:

1. Літовченко В. А. Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій // Автореферат дис. д-ра фіз. – мат. наук.: 01.01.02. – Київ, 2009. – 32 с.
2. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами / В. А. Літовченко, І. М. Довжицька // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №4. – С. 516–552.
3. Довжицька І.М. Задача Коші для параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом // Дис. канд. фіз.–мат. наук.: 01.01.02. – Чернівці, 2014. – 138 с.
4. Some properties of Green’s functions of Shilov-type parabolic systems. Litovchenko,V., Unguryan, G. Miskolc Mathematical Notes, 2019, 20(1), pp.365-379 DOI: https://real.mtak.hu/94942/1/2089.pdf

Abstract. *In the paper I consider a new class of parabolic systems of equations with partial derivatives and variable minor coefficients of finite smoothness, which includes the class* $PSh_{\mu\geq0}^{\infty}$ *and class of Petrovsky systems of the first order in the time variable with coefficients of the group of* *senior members independent of the spatial variable, as well as the classes of Shilov and Zhytomyr parabolic systems with an inalienable kind. The fundamental solution of the Cauchy problem is studied, as well as the main properties of the studied class.*

Key words: *Cauchy problem, bounded smoothness, variable coefficients, fundamental solution.*

Стаття відправлена: 20.04.2024 р.