https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj25-00-027
DOI: 10.30888/2663-5712.2024-25-00-027

УДК 517.51:378.147

STUDYING THE THEORY OF BOUNDARIES BY ENGINEERING STUDENTS: TYPICAL PROBLEMS AND TIPS FOR OVERCOMING THEM (FROM OWN TEACHING EXPERIENCE)

ВИВЧЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ СТУДЕНТАМИ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ: ТИПОВІ ПРОБЛЕМИ ТА ПОРАДИ ЩОДО ЇХ ПОДОЛАННЯ (З ВЛАСНОГО ДОСВІДУ ВИКЛАДАННЯ)

Repeta V.K. / Репета В. К.
c.f. and m.s., as.prof / к.ф-м.н., доц.
ORCID: 0000-0002-5615-7889
National Aviation University,
Kyiv, Lyubomyr Huzar Avenue, 1, 03058
Національний авіаційний університет,
Київ, проспект Любомира Гузара, 1, 03058
Repeta L.A. / Репета Л. А.
c.f. and m.s., as.prof. / к.ф-м.н., доц.
ORCID: 0000-0002-6547-3998
National Technical University of Ukraine "Ihor Sikorsky
Kyiv Polytechnic Institute",
Kyiv, Peremogy Avenue, 37, 03056
Націона́льний техні́чний університе́т Украї́ни
«Ки́ївський політехні́чний інститу́т і́мені І́горя Сіко́рського»,
Київ, проспект Перемоги, 37, 03056

Анотація. *Становлення сучасного інженера неможливе без ґрунтовної математичної підготовки. Для технічних спеціальностей у закладах вищої освіти є курс вищої математики. Теорія границь є важливою складовою цього курсу. На певних етапах опанування цього розділу студенти припускаються помилок, які повторюються з року в рік.*

У статті розглядаються типові проблеми, які виникають у студентів технічних спеціальностей під час вивчення теорії границь у курсі вищої математики, і пропонуються певні рекомендації щодо їх подолання.

Ключові слова: *границя послідовності, границя функції, невизначеності, еквівалентності, правила Лопіталя.*

Вступ

Важливу роль у математичній підготовці фахівців різних напрямів, зокрема й інженерного профілю, відіграє теорія границь. Часто у багатьох наукових чи технічних розрахунках, під час математичного моделювання різноманітних процесів доводиться оперувати з приростами змінних величин, обчислювати чи використовувати границі відношення нескінченно малих величин, або границі сум нескінченно малих. У курсі вищої математики з елементами теорії границь студенти вперше знайомляться в першому семестрі під час вивчення модуля «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної» [1]. У цьому модулі дається означення фундаментального поняття – похідної функції $f(x)$ в точці x_0 як границі відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Надалі границі використовуються під час вивчення диференціального числення функції багатьох змінних, інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, а саме під час уведення понять визначеного інтеграла та невласних інтегралів першого і другого роду, подвійних, потрійних, криволінійних та поверхневих інтегралів. В теорії числових та функціональних рядів необхідність застосування границь виникає під час дослідження збіжності рядів [2]. Границі також використовують в теорії функції комплексної змінної, зустрічаються в теорії ймовірностей, наприклад, під час уведення статистичного означення ймовірності, під час формулювання граничних теорем Бернуллі та Чебишова тощо.

На ознайомлення з теорією границь відводиться незначна кількість лекційних та практичних годин, здебільшого по 8 – 12 годин на лекції і приблизно стільки ж – на практику. Традиційно викладення матеріалу здійснюється у такій послідовності: 1) границя послідовності: основні поняття та означення, нескінченно малі та великі послідовності, теореми про границі, теорема Вейєрштрасса про збіжність монотонної та обмеженої послідовності, число Ейлера; 2) границя функції: основні поняття та означення, властивості нескінченно малих функцій, теореми про границі, перша та друга важливі границі, наслідки, порівняння нескінченно малих функцій, еквівалентні нескінченно малі функції, 3) неперервність функцій. Під час вивчення застосування похідних розглядають правила Лопіталя знаходження границь функцій певного виду.

Основний текст

Слід зазначити, що студенти знайомі з початками теорії границь ще зі старшої школи. Проте часу, відведеного на опанування теоретичного матеріалу та вироблення практичних навичок обчислення границь у потрібному обсязі, явно недостатньо. Тому, на думку авторів, слід привернути увагу студентів на певних проблемних моментах та типових помилках, які щороку у тій чи іншій мірі кожен викладач спостерігає під час вивчення студентами розділу теорії границь. Надалі притримуватимемося підходів, запропонованих в [3].

1. Насамперед, понятійний апарат теорії границь для переважної більшості студентів є надзвичайно складним. Не часто можна зустріти студента, який спроможний чітко й усвідомлено сформулювати строге математичне означення границі послідовності чи границі функції в точці. І це не дивно, адже розуміння означення границі вимагає від студента глибокого логічного мислення та належної математичної підготовки. Тому введення поняття границі доцільно розпочинати на інтуїтивному рівні з розгляду «очевидних» прикладів, наприклад, запропонувати студентам визначити, куди прямують значення виразів $\frac{n+1}{5}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{n+1}{n}$, якщо $n \to \infty$; $2x+3$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x+1}{x-1}$, якщо $x \to 1$; $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+2x}{x}$, якщо $x \to 0$ тощо. Важливо загострити увагу студентів на тому, що запис $x \to x_0$ означає лише необмежене наближення змінної x до фіксованого числа x_0, але $x \neq x_0$. Лише після розгляду таких прикладів радимо давати означення границі послідовності та границі функції у точці.

2. Важливо звернути увагу студентів, що обчислення кожної границі слід розпочинати з аналізу поведінки самої функції в околі точки x_0, тобто

встановити має чи не має функція у цій точці невизначеність. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 визначена і неперервна в околі цієї точки, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$. Якщо ж в точці x_0 є невизначеність, то далі потрібно розкрити цю невизначеність, тобто позбутися її, використовуючи належні рівносильні перетворення або ж застосувавши відповідні теореми чи правила.

3. Нерідко трапляються випадки, коли студенти плутають алгоритм обчислення границі вигляду $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$ з невизначеністю $\left(\frac{0}{0}\right)$ з алгоритмом обчислення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$ з невизначеністю $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (тут $P_n(x), P_m(x)$ – поліноми степенів n і m відповідно). Причина помилкових дій цілком зрозуміла – це зовнішня схожість розглядуваних виразів. Насамперед слід звертати увагу на те, до якої величини прямує змінна x. Якщо x прямує до нескінченності, тоді чисельник і знаменник ділять на x у відповідному степені. Якщо ж змінна x прямує до конкретного числа, а значення поліномів $P_n(x), P_m(x)$ прямують до нуля, то їх розкладають на множники. Таку ж помилку часто роблять під час обчислення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{P_n(x)}-\sqrt{Q_n(x)}\right)$ з невизначеністю $(\infty-\infty)$, порушуючи рівносильність перетворень. Чимало студентів переходять, наприклад, до границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{P_n(x)}-\sqrt{Q_n(x)}\right)^2 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(P_n(x)-Q_n(x)\right)$, роблячи цілу низку помилок.

4. Під час обчислення границь інколи корисно виконати такі дії: відняти від певного виразу та додати до нього один і той же вираз (або число); помножити та поділити вираз на той самий відмінний від нуля вираз (часто цей вираз є спряженим до певного множника). Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c, \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-c+c-g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-c}{h(x)} + \lim_{x\to x_0}\frac{c-g(x)}{h(x)}.$$

Наприклад,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1+1-\left(3x-2\right)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x^2-1} - \lim_{x\to 1}\frac{3\left(x-1\right)}{x^2-1}.$$

5. Для полегшення перетворень під час обчислення границь досить часто зручно спочатку виконати відповідну заміну так, щоб нова змінна прямувала до нуля. Тоді, якщо $x\to x_0$, де x_0 – відмінне від нуля число, то внаслідок заміни $x-x_0=t$ отримуємо $t\to 0$. Особливо корисно робити таку заміну у прикладах на використання першої важливої границі, наслідків з першої та другої важливих границь. Проте зазначимо, до ця дія не є обов’язковою.

Трапляються випадки, коли можна замінити не лише змінну, а й цілий вираз на нову змінну, внаслідок чого обчислення границі суттєво полегшується, наприклад:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-12}{\sqrt[6]{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\sqrt[6]{x}=t,\\ x=t^6,\\ t\to 2\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+t^3-12}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2-4+t^3-8}{t-2}=$$

$$=\lim_{t\to 2}\left(t+2+t^2+2t+4\right)=\lim_{t\to 2}\left(t^2+3t+6\right)=16\,.$$

6. Потужним апаратом для обчислення границь функцій є застосування еквівалентностей. Слід зазначити, що студенти досить рідко самостійно користуються таким підходом. Трапляються випадки, коли студенти просто не розуміють, який вираз і яким чином замінити еквівалентним. Наприклад, знаючи, що при $x\to 0$ $\sin\sim x$, для багатьох студентів є проблемою відшукання границі $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\sin\dfrac{\pi}{2x+1}$. Студентам важливо пояснити, що запис $\sin\sim x$ при $x\to 0$ по суті означає, що $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, якщо $\alpha(x)\to 0$. У нашому випадку $\alpha(x)=\dfrac{\pi}{2x+1}\to 0$, коли $x\to\infty$.

Зауважимо, що інколи студенти використовують заміну функції на еквівалентну, на їх погляд, не враховуючи, куди прямує аргумент цієї функції. У результаті припускаються помилки, наприклад, вважають, що $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{x}=1$.

Окрім цього принагідно зазначити, що часто проблемою є обчислення границі у випадку, коли у чисельнику досліджуваного дробу наявна різниця еквівалентних функцій. Тоді не задумуючись пишуть, що границя дорівнює нулю. Трохи краща ситуація у випадку, коли різниця еквівалентних функцій наявна у знаменнику дробу, адже студенти знають, що на нуль ділити не можна.

7. Проблеми виникають у студентів також у випадках, коли необхідно обчислити границю функції, яка є добутком обмеженої та нескінченно малої функцій.

Наприклад,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\cos x\right)\cdot\frac{1}{x^2}=0\,,$$

оскільки $-1\le 2+\cos x\le 3$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, тобто функція $2+\cos x$ є обмеженою, а функція $\dfrac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$ є нескінченно малою. Пояснити отриманий результат можна також за допомогою теореми про границю проміжної функції.

8. Під час обчислення границь за правилами Лопіталя також виникають помилки. Зазначимо, що правила Лопіталя є корисними для обчислення границь

функцій за наявності невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Найбільш типова помилка – це обчислення відповідної границі за хибною формулою $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$. Інколи студенти від границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ з невизначеністю $0\cdot\infty$ переходять до обчислення границі $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)'\left(g(x)\right)'$.

Окрім цього важливо звернути увагу студентів, що безпосереднє застосування правил Лопіталя може призвести до громіздких перетворень. Тому, перш ніж перейти до границі відношення похідних, доцільно проаналізувати можливість заміни функцій $f(x)$ і $g(x)$ на еквівалентні функції. Наприклад, границю $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\ln\left(\sin^2(3x)+\operatorname{arctg}x\right)$ звести спочатку до рівносильного вигляду $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\left(9x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(9x^2+x\right)}{\frac{1}{x}}$, і після таких перетворень застосувати правило Лопіталя.

Висновок Звичайно, у наш час створено чимало електронних засобів, які дають змогу швидко обчислювати різноманітні границі функцій та послідовностей. Проте вважаємо, що ґрунтовне знання теорії границь сприятиме якісній математичній підготовці спеціалістів інженерного профілю, зокрема в насичених математикою галузях, приміром електроніки, телекомунікацій тощо. Сподіваємось, що цьому сприятимуть акценти, розставлені у цій статті.

Література:

1. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика. Підручник – 2-е вид., виправ. – К.: НАУ, 2017. – Ч.1. – 472 с.

2. Репета В.К. Вища математика. Підручник – 2-е вид., виправ. – К.: НАУ, 2017. – Ч.2. – 504 с.

3. Репета, В. & Репета, Л. (2023). Вивчення числових рядів студентами технічних спеціальностей: типові проблеми та поради щодо їх подолання (з власного досвіду викладання) // SWorldJournal , 2 (20-02), 32–37. https://doi.org/10.30888/2663-5712.2023-20-02-012

Abstract. *Becoming a modern engineer is impossible without thorough mathematical training. For technical specialties in institutions of higher education, there is a course of higher mathematics. Boundary theory is an important component of this course. At certain stages of mastering this section, students make mistakes that are repeated from year to year. The article examines the typical problems that students of technical specialties have when studying the theory of limits in the course of higher mathematics, and offers certain recommendations for overcoming them.*

Key words: *limit of sequence, limit of function, uncertainty, equivalence, Lopital rules.*

Стаття відправлена: 18.05.2024 р.