



УДК 004.9

MATHEMATICAL MODEL OF THE HUMAN VISUAL ORGAN BASED ON THE COMPARISON METHOD

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОРГАНУ ЗОРУ ЛЮДИНИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ПОРІВНЯННЯ

Tokariev V.V. / Токарев В.В.

с.т.с., ас. проф. / к.т.н., доц.

ORCID: 0000-0002-7143-6165

Simon Kuznets Kharkiv national university of economics, Kharkiv, av. Science, 9a, 61165

Національний економічний університет ім. Семена Кузнеця, Харків, пр. Науки, 9а, 61165

Анотація. В роботі використовується для моделювання функцій зору людини метод порівняння, який широко застосовується у колориметричних дослідках. Для вирішення такого класу завдань отримано математичну модель за допомогою предикатів спеціального виду. Пропонується використовувати окремий випадок методу порівняння – метод нуль – орган, для якого застосовується математичний апарат предикатів спеціального виду, а як вхідні спектри світлових випромінювань використовується функціональний простір. У колориметричних дослідках, дійсно, вивчається поведінка людини, що об'єктивно реєструється. Спостерігач виступає у ролі якогось "чорного ящика" з двома входами і одним виходом. На входи "чорного ящика" надходять світлові випромінювання, що характеризуються своїми спектрами. З математичного погляду ці спектри представляють функції дійсного аргументу, заданого на одиничному інтервалі, з дійсними значеннями. Встановлено, що методом порівняння можна розрізнити за кольором багато мільйонів світлових випромінювань.

Ключові слова: тестування, метод, предикат, спостерігач, вимір кольору, спектри, світлові випромінювання.

Вступ.

В даний час велика увага приділяється питанням, пов'язаним з вивченням психофізичних явищ, при цьому об'єктом дослідження служать:

-відчуття людини;

-фізичні процеси, що діють на наші органи почуттів та викликають відчуття.

Область науки, що вивчає перетворення інформації органами почуттів, називається психофізикою. Психофізика має численні практичні та технічні додатки. На результати її досліджень спирається кібернетика, системотехніка, обчислювальна техніка, автоматика та багато інших сфер практичної діяльності людини. Математичне опис відчуттів людини ставить перед дослідниками завдання розробки математичного апарату. Класична завдання психофізики зору полягає у вивченні зв'язку між світловим випромінюванням, тобто зоровими



картинами та характеристиками зорових образів (насиченість, колірний тон та ін.) Основним інструментом колориметрії - науки про вимір кольору - є метод порівняння кольорів. Пропонується використовувати окремий випадок методу порівняння – метод нуль – орган, для якого застосовується математичний апарат предикатів спеціального виду, а як вхідні спектри світлових випромінювань використовується функціональний простір. Згідно з цим методом, спостерігачеві пред'являють на двох невеликих полях, що мають загальний кордон, світлові випромінювання, що характеризуються відповідно спектрами $b'(\lambda)$ і $b''(\lambda)$. Спостерігач сприймає ці випромінювання у вигляді двох кольорових плям, що стикаються. Від нього потрібно дати відповідь на питання, чи збігаються або не збігаються один з одним кольори полів порівняння. Формування відповіді істотно полегшується тим, що у разі збігу кольорів кордон між кольоровими плямами зникає. Таким чином, спостерігач фактично приймає рішення про збіг або відмінність кольорів за допомогою дуже тонкого індикатора – відсутності чи наявності видимої межі між полями порівняння. Про високу чутливість методу порівняння свідчить такий факт. Якщо подати на поля порівняння кілька ідентичних випромінювань $(b'(\lambda), b''(\lambda))$, то спостерігач зареєструє рівність кольорів. Проте якщо пред'явити пару випромінювань, тобто на правому полі енергетичний рівень випромінювання підвищити лише на 1% без зміни спектрального складу світла, то спостерігач із нормальним зором чітко зафіксує відмінність кольорів. Встановлено, що методом порівняння можна розрізнити за кольором багато мільйонів світлових випромінювань. При першому погляді може показатися, що кольори взаємно однозначно пов'язані з породжувачами їх світловими випромінювання, і тому спостерігач реєструє рівність або нерівність кольорів тим самим виявляє співпадіння або різні правові світлові випромінювання. Однак існує безліч (повністю різних за спектром і за потужністю світлових випромінювань (їх називають метамерними), які для очей абсолютно не відрізняються від кольору). Тоді, можна говорити що різних кольорів набагато менше, ніж різних світлових випромінювань. Орган зору



реагує одним і тим же кольором на величезне число різних світлових випромінювань. Таким чином, очі, формуючи колір, саме групує світлові випромінювання в деяких класах. Встановлено, крім того, що різні спостерігачі класифікують світлові виділення не зовсім однаково. Тому світлі випромінювання, видимі одним спостерігачем як одноколірні, для другого спостерігача будуть, як правило, виглядати неоднаковими за кольором. З цих фактів випливає, що кожна людина є особливим об'єктом для колориметричного дослідження. Більш того, виявляється, що один і той же спостерігач в різні періоди свого життя в колориметричних досвідах може реагувати по-різному. Це означає, що параметри зорової системи людини з поточним часом змінюються, еволюціонують.

Метою статті є побудова математичної моделі органу зору людини на основі методу порівняння, що описується за допомогою предикатів, а також виконання властивостей предикатів та чисельна реалізація на персональному комп'ютері завдань даним методом.

Основний текст.

У колориметричних дослідах, дійсно, вивчається поведінка людини, що об'єктивно реєструється. Спостерігач виступає у ролі якогось "чорного ящика" з двома входами і одним виходом. На входи "чорного ящика" надходять світлові випромінювання, що характеризуються своїми спектрами $b'(\lambda)$ та $b''(\lambda)$. З математичного погляду ці спектри представляють функції дійсного аргументу, заданого на інтервалі $[\lambda_1, \lambda_2]$, з дійсними значеннями $b'(\lambda)$ та $b''(\lambda)$. На виході "чорної скриньки" формується двійковий сигнал $y \in \{0, 1\}$. Його значення 1 будемо інтерпретувати як відповідь спостерігача "так", що означає рівність кольорів на полях порівняння, а значить 0 - як відповідь "ні", що означає нерівність кольорів.

Таким чином, спостерігач своєю поведінкою реалізує певний предикат:

$$Y = F(b'(\lambda), b''(\lambda)), \quad (1)$$

і саме властивості цього предикату вивчаються у колориметричних



експериментах. Як вхідні сигнали $b'(\lambda)$ та $b''(\lambda)$, так і вихідний сигнал Y можуть бути зареєстровані фізичними приладами і тому дають цілком об'єктивну інформацію для встановлення виду предикату. Однак у цьому ще немає місця для суб'єктивних станів спостерігача, поки ні слова не сказано про кольори зорових відчуттів та про операцію порівняння кольорів, що здійснюється свідомістю спостерігача.

В силу відомої теореми Рисса про загальний вид лінійного функціоналу кожен лінійний безперервний функціонал $\alpha(x)$ на $L_2[\alpha, b]$ задається формулою:

$$\alpha_i(x) = \int_{\alpha}^b g_i(t)x(t)dt, \quad g(t) \in L_2, \quad (2)$$

Теорема 1. Предикат $T(x, y)$ на $L_1 \times L_2$ тоді і тільки тоді представим у вигляді:

$$T(x, y) = D(U(x), U(y)), \quad (3)$$

де $U(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$. За теоремою Рисса функціонали $\alpha_i(x)$ задаються рівностями:

$$\alpha_i(x) = \int_{\alpha}^b g_i(t)x(t)dt, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4)$$

причому лінійна незалежність функціоналів $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ рівносильна лінійній незалежності функцій $g_1(x), \dots, g_n(x) \in L_2$ (тобто відповідних класів функцій), коли він задовольняє якимось властивостям.

Доказ. Якщо властивості виконуються, то, як щойно було показано, мають місце рівності (3) та (4) з лінійно незалежними $g_1(x), \dots, g_n(x) \in L_2$. Якщо мають місце рівності (3) та (4) з лінійно незалежними $g_1(x), \dots, g_n(x) \in L_2$, то відображення $A(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$ є лінійний безперервний оператор з L_2 на n -мірне векторний простір $H = \{(\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))\}$, причому $T(x, y) = D(A(x), A(y))$. Тоді згідно **теореми 1** виконуються деякі властивості. Теорему доведено.



Висновки.

Було розроблено математичну модель органу зору людини на основі методу порівняння, що описується за допомогою предикатів, а також виконання властивостей предикатів та чисельна реалізація на персональному комп'ютері завдань даним методом. Була розглянута можливість применения "метода сравнения" для моделирования функций человеческого зрения. Були отримані результати у вигляді математичної моделі. Математична модель для розв'язання завдань описана за допомогою теорії предикатів спеціального виду. Розглянуто методи чисельної реалізації на персональному комп'ютері задач запропонованим способом.

Література:

1. Koshevoy N., Ilina I., Tokarev V., Malkova A., Muratov V. Implementation Of The Gravity Search Method For Optimization By Cost Expenses Of Plans For Multifactorial Experiments. Radioelectronic and Computer Systems, 2023. – Vol. 1(105), pp. 23-32. DOI:10.32620/reks.2023.1.02
2. Koshovyi M. D., Pylypenko O. T., Ilyina I. V., Tokarev V. V. Growing tree method for optimization of multifactorial experiments, Radio Electronics, Computer Science, Control, 2023. - № 3, pp. 55-61. DOI:10.15588/1607-3274-2023-3-6
3. L.E. Gryzun, V.V. Tokarev. Mobile applications design for digital education: IT-students' engagement experience on conditions of online learning the course "Mobile technologies". Proceedings of the 2nd Workshop on Digital Transformation of Education, co-located with the 18th International Conference on ICT in Education, Research, and Industrial Applications: (ICTERI 2023). CEUR Workshop Proceedings, 2023. Ivano-Frankivsk. Ukraine, pp. 110-123.
4. Ільїна І.В., Токарев В.В., Яковлєв А.В., Шевченко І.І. Використання системи підтримки прийняття рішень для організації гуманітарної логістики, Системи управління, навігації та зв'язку, 2024, №1(75), С. 88-91. DOI: 10.26906/SUNZ.2024.1.088
5. Токарев В., Ільїна І., Шевченко І., Гриценко І. Про один підхід до рішення



асиметричної TSP – задачі при B2C доставках за допомогою платформи "Swarm-bot" – system у фізичному неорганізованому середовищі. Системи управління, навігації та зв'язку, 2023. – №4(74), С. 110 – 113. DOI: 10.26906/SUNZ.2023.4.110

6. Віт В.В. Будова зорової системи людини / В.В. Віт – К.: Науковий світ, 2019. – С.364.
7. Ахиезер М.І. Теорія лінійних операторів у гільбертовому просторі / М.І. Ахиезер – К.: Науковий світ, 2020. – С.254.
8. Курош А.Г. Теория групп. / А.Г. Курош – К.: Науковий світ, 2021. – С.152.
9. Данілін Ю.М. Чисельні методи в екстремальних задачах / Ю.М. Данілін – К.: Науковий світ, 2020. – С.350.
10. Рисс Ф., Функціональний аналіз / Ф. Рисс – К.: Науковий світ, 2019. – С.188.
11. Хаусхолдер О.С. Основи чисельного аналізу / О.С. Хаусхолдер – К.: Науковий світ, 2021. – С.182.
12. Хаппе В. Офтальмологія / В. Хаппе – К.: МЕДпрес, 2019. – С.212.
13. Антошін Д.М. Картографія зорових потенціалів / Д.М. Антошин – К.: МЕДпрес, 2019. – С.216.
14. Григорова Л.П. Електрофізіологічні дослідження колірного зору людини / Л.П. Григорова – К.: МЕДпрес, 2022. – С.276.
15. Зак П.П. Теоретичні основи корекції зору / П.П. Зак – К.: МЕДпрес, 2020. – С.176.

Abstract. In the work, the comparison method widely used in colorimetric experiments is used to model the functions of human vision. To solve this class of problems, a mathematical model was obtained with the help of predicates of a special type. It is proposed to use a special case of the comparison method - method zero - the body for which the mathematical apparatus of predicates of a special type is used, and the functional space is used as input spectra of emitted light. In colorimetric experiments, the behavior of an objectively recorded person is indeed studied. The observer acts as a kind of "black box" with two inputs and one output. The inputs of the black box receive light radiation characterized by their spectra. From a mathematical point of view, these ranges represent functions of a real argument, given on a unit interval, with real values. It was established that by the method of comparison it is possible to distinguish by color many millions of light emitted.

Key words: testing, method, predicate, observer, color measurement, spectra, light radiation.

Статтю надіслано: 18.09.2025 г.

© Токарев В.В.