



УДК 514.12

ANALYTICAL CALCULATIONS OF CERTAIN CASES OF GEOMETRIC ARRANGEMENT OF FIRST AND SECOND ORDER LINES ON A PLANE

АНАЛІТИЧНІ РОЗРАХУНКИ ПЕВНИХ ВИПАДКІВ ГЕОМЕТРИЧНОГО РОЗТАШУВАННЯ ЛІНІЙ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ПОРЯДКІВ НА ПЛОЩИНІ

Vyshenska O. V. / Вишенська О.В.*s.ph. and m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.*ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3360-8552>*National Transport University, Kyiv, Omelyanovych-Pavlenkot., 1, 01010**Національний транспортний університет, Київ, Омеляновича-Павленка, 1, 01010***Belova M.A. / Бєлова М.О.**ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0546-8094>*s.ph. and m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.**State University of Trade and Economics, Kyiv, Kyoto, 19, 02156**Державний торговельно-економічний університет, Київ, Кіото, 19, 02156*

Анотація. Геометрія, як одна з найдавніших галузей математики, завжди прагнула до систематизації та класифікації форм і їхніх взаємозв'язків. Тому вивчення ліній першого та другого порядків на площині становить фундаментальний інтерес. У даній роботі розглянуто задачу визначення ізогон параболи, тобто множини точок площини, з яких парабола спостерігається під довільним фіксованим кутом φ .

Метою дослідження було аналітичне та графічне визначення всіх типів ізогон параболи. Застосовано аналітичну та графічну геометрію. Встановлено, що крім вже відомої "внутрішньої" частини, парабола має три додаткові ізогони: саму себе, свою директрису та гілки гіпербол.

Доведено, що ці гіперболічні ізогони проходять через кожну точку площини нижче параболи (за винятком точок на директрисі) і їх розташування залежить від значення кута. Зокрема, показано, що для деяких кутів гіперболічні ізогони мають спільний фокус з параболою, тоді як для інших їхні фокуси розташовані на осі ординат. Робота підкреслює потенціал подальших досліджень взаємозв'язку між структурою ізогон та іншими геометричними властивостями кривих, а отримані результати можуть бути використані для вивчення ізогон класичних кривих.

Ключові слова: ізогони параболи, директриса, кут нахилу, дотична, лінія.

Вступ.

Лінії першого порядку, або прямі, є найпростішими геометричними об'єктами, тоді як лінії другого порядку, відомі як конічні перерізи (еліпс, парабола, гіпербола), представляють більш складні, але не менш важливі форми. Їхнє взаємне розташування може бути, як перетином, дотиком, відсутністю спільних точок, що, в свою чергу, відкриває широкі можливості для аналітичних досліджень. Це знаходить застосування як у теоретичній математиці, так і в прикладних галузях, таких як фізика, інженерія, комп'ютерна графіка тощо [3-5]. Дане дослідження присвячене огляду ключових аспектів розташування цих ліній



та останніх тенденцій у цій галузі. Надамо відповідь на питання: як розміщені у площині параболи точки, з яких її видно під довільним фіксованим кутом φ ?

Публікації в цій області присвячені розробці нових прикладів, задач та підходів, що демонструють актуальність і практичну значимість класичних концепцій [4,5]. Розрізнені дані про криві другого порядку можна знайти в довідниках, навчально-методичних посібниках і підручниках фізико-математичного та технічного спрямування [2]. Геометричний підхід до виведення канонічних рівнянь розглядається в роботах Улітіна Г.М.

Розглянемо цікаву задачу, в якій ми опишемо ізогони параболи $y = ax^2$ ($a > 0$). Відомо, що з кожної точки директриси параболи її (параболу) видно під прямим кутом.

Мета роботи полягає в знаходженні рівнянь усіх ізогон параболи і можливості дати їх аналітичну характеристику.

Новизна роботи полягає в поглибленому та систематичному аналізі ізогон параболи, виявленні нових їхніх типів та властивостей, у формулюванні нових напрямків для подальших досліджень у цій галузі геометрії.

Основний матеріал.

В роботі застосовуються аналітичні та графічні методи дослідження аналітичної геометрії. Ізогоною плоскої лінії l (чи плоскої фігури) називаємо множину всіх тих точок площини, із якої цю лінію (фігуру) l видно під однаковим кутом φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Якщо з точок даної ізогони лінію l видно під кутом φ , то цю ізогону називаємо φ –ізогоною. Наприклад, внутрішні точки круга складають 2π –ізогону кола S , що його оточує. Коло S є своєю власною π –ізогоною. Решта ізогон кола S – концентричні з ним кола більших радіусів (рисунок 1).

Зокрема, його $\frac{\pi}{2}$ –ізогоною є коло, що має радіус $r\sqrt{2}$, де r – радіус кола S .

Цілком очевидно, що для параболи $y = ax^2$ ($a > 0$) її 2π –ізогоною є область $\{(x, y) | y > ax^2\}$, а її π –ізогоною є вона сама. Останнє –наслідок диференційовності функції $y = ax^2$ та її однобічної опуклості.

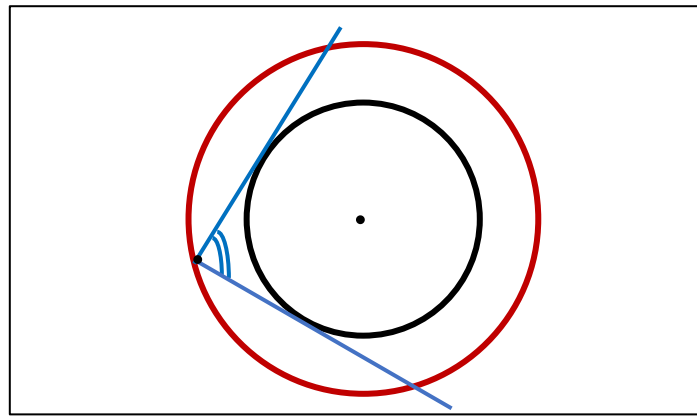


Рисунок 1 - Коло та його ізогона

Хай $M(X; Y)$ – точка, що лежить під параболою $y = ax^2$. Через неї можна провести дві дотичні до параболи (рисунок 2).

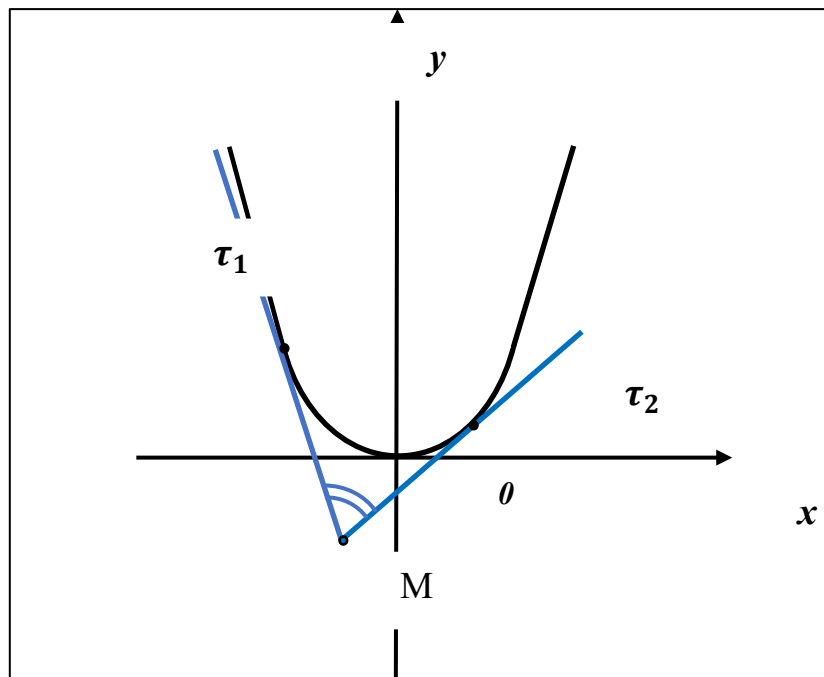


Рисунок 2 - «Вид» на параболу з точки M

Один з двох суміжних кутів, що утворюють ці дотичні, є саме тим кутом, під яким параболу видно з точки M .

Хай $(x_1; ax_1^2)$ та $(x_2; ax_2^2)$ – точки дотику названих дотичних до параболи. Вважатимемо, що $x_1 < x_2$. Із рівнянь дотичних

$$\tau_1: y = 2ax_1x - ax_1^2$$

та



$$\tau_2: y = 2ax_2x - ax_2^2$$

виражаємо координати їхньої точки перетину $M(X; Y)$ через абсциси точок дотику:

$$X = \frac{x_1+x_2}{2}, Y = ax_1x_2. \quad (1)$$

Позначивши через φ_1 і φ_2 кути нахилу дотичних τ_1 і τ_2 до додатнього напрямку осі абсцис, а через φ кут, під яким видно параболу з точки M , отримаємо [1]:

$$tg\varphi = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{2a(x_2 - x_1)}{1 + 4a^2x_1x_2}. \quad (2)$$

Через те, що

$$x_2 - x_1 = -\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = -\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = -\frac{2}{a}\sqrt{a^2X^2 - aY},$$

а

$$x_1x_2 = \frac{Y}{a},$$

то, позначивши для зручності $tg\varphi = \mu$, отримуємо таке рівняння φ -ізогони (для $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$):

$$\mu(1 + 4aY) = -4\sqrt{a^2X^2 - aY} \quad (3)$$

Зауважимо, що для гострого кута φ ($\mu > 0$) для точок ізогони справджується нерівність

$$Y < -\frac{1}{4a},$$

для тупого кута φ ($\mu < 0$) – нерівність $Y > -\frac{1}{4a}$.

Після піднесення рівняння (3) до квадрату отримуємо рівняння гіперболи

$$-\frac{X^2}{\frac{\mu^2+1}{4a^2\mu^2}} + \frac{\left(Y + \frac{\mu^2+2}{4a\mu^2}\right)^2}{\frac{\mu^2+1}{4a^2\mu^4}} = 1. \quad (4)$$

Воно акумулює в собі два рівняння (3) для протилежних значень μ .

Цим протилежним значенням відповідають ізогони для кутів φ та $\pi - \varphi$.

Ці ізогони – різні гілки тієї самої гіперболи. Цікаво відзначити, що верхні фокуси всіх гіпербол (4) збігаються з фокусом даної параболу $(0; \frac{1}{4a})$.



Лишається зазначити, що $\frac{\pi}{2}$ -ізогону відразу вбачаємо з рівності (2). Її рівняння:

$$1 + 4aY = 0.$$

Отже, $\frac{\pi}{2}$ -ізогоною параболи є її директриса (рисунок 4).

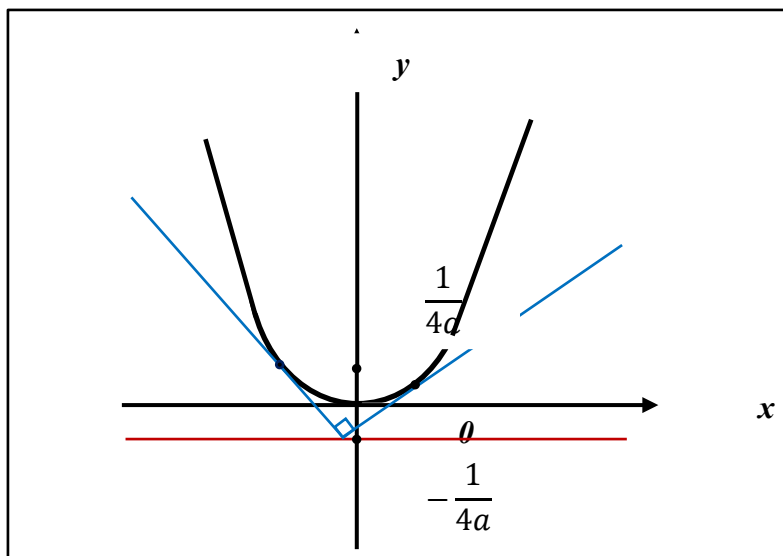


Рисунок 3 - $\frac{\pi}{2}$ ізогона параболи $y = ax^2$

Цей останній результат було доведено Коксетером Х.С.М. методами проективної геометрії. Саме це стимулювало авторів до повного дослідження питання. Отже, крім специфічної ізогони параболи $y = ax^2$ – її «внутрішньої» частини $\{(x, y) | y > ax^2\}$, парабола має ще три типи ізогон: її саму, її директрису $y = -\frac{1}{4a}$ та гілки гіпербол (3).

1. Через кожную точку площини, що лежить нижче параболи й не лежить на її директрисі, проходить одна така гілка гіперболи.

2. Якщо $\mu < 0$, то гілки гіпербол містяться між параболою та її директрисою. Усі вони мають спільний фокус, що збігається з фокусом параболи.

3. Якщо $\mu > 0$, то гілки гіпербол лежать під директрисою параболи і мають різні фокуси, які залежно від μ розташовуються в точках осі ординат на проміжку $(-\infty; -\frac{3}{4a})$.

4. Ті дві ізогони параболи, які відповідають протилежним значенням μ (тобто φ -ізогона та $(\pi - \varphi)$ -ізогона), є гілками гіперболи (4), центр якої лежить



у точці $\left(0; -\frac{\mu^2+2}{4a\mu^2}\right)$.

Розглянемо такий приклад: $y = x^2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Тобто, з точок якої гіперболи параболу $y = x^2$ «видно» під кутом $\frac{\pi}{4}$?

Маємо, що $a = \mu = 1$. Підставимо ці значення в (4):

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}} = -1.$$

Фокусами цієї гіперболи є точки $F_B\left(0; \frac{1}{4}\right)$ та $F_H\left(0; -\frac{7}{4}\right)$, а її асимптотами є $y = \pm x - \frac{3}{4}$ (рисунок 4).

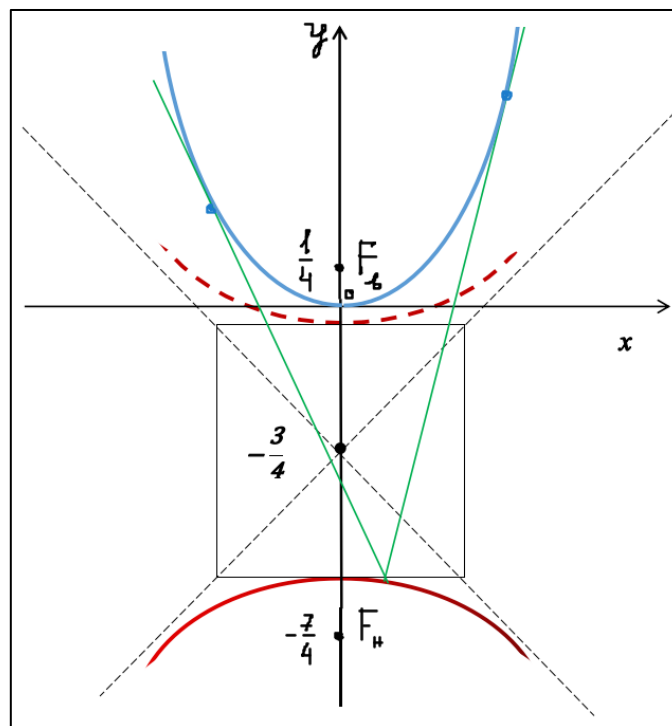


Рисунок 4 - Ізогони параболу $y = x^2$ для кута $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Висновки.

Вивчення ізогон класичних ліній і фігур є перспективним напрямком у геометрії. Існують всі підстави очікувати нових відкриттів при пошуку взаємозв'язків між структурою ізогон та іншими, вже відомими властивостями геометричних фігур. Чудовим прикладом цього є параболу, для якої будову ізогон можна визначити, спираючись на її оптичні властивості [1, 4].



У майбутньому варто зосередитися на дослідженні ізогон таких фігур, як еліпс та арка циклоїди. Крім того, цікавим є зворотний підхід: спроба з'ясувати властивості кривої, аналізуючи її ізогони. Надалі планується ці дослідження поєднати з розробкою більш ефективних алгоритмів, інтеграцією з передовими обчислювальними методами та пошуком нових, несподіваних застосувань цих фундаментальних геометричних концепцій.

Література:

1. Вишенська О.В. Ізагони еліпса. Збірник наукових праць НТУ. – Вип.24(2) – К.: НТУ, 2011. – с.269 – 273.
http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vntu_2011_24%282%29_68
2. Драч, К. Д., Шугайло, О. О., Ямпольський, О. Л. Канонічна теорія кривих другого порядку. Навчально-методичний посібник. – Харків., 2020. – 39с.
http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20200406094041_e7217d744d0.pdf
3. Моцний, Ф. В. Криві другого порядку та їх застосування в економіці. Частина II. Економічні задачі та криві другого порядку./ Науковий вісник Національної академії статистики, обліку та аудиту. – Київ, 2014, – Вип. 3. – с.77–85. http://nbuv.gov.ua/UJRN/nvhastat_2014_3_10
4. Стеганцев Є.В. Класифікація кривих другого порядку за їх прообразами при стереографічній проекції. Журнал «Прикладні питання математичного моделювання». – Харків, 2020. – т. 3(2.1). – с. 260-269.
<https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.24>
5. Селезньова Н. П., Кушлик-Дивульська О. І. Криві другого порядку. Канонічний вигляд. /Актуальні питання природничо-математичної освіти: зб. наук. праць. СДПУ.– Суми, 2023. – Вип. 2 (22). – с. 96–107.
<https://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/14673>

Abstract. Geometry, as one of the oldest branches of mathematics, has always sought to systematize and classify shapes and their relationships. Therefore, the study of lines of the first and second orders on the plane is of fundamental interest. In this paper, we consider the problem of determining the isogonies of a parabola, i.e., the set of points in the plane from which the parabola is observed at an arbitrary fixed angle.^f The aim of the study was to determine analytically and



graphically all types of isogonies of a parabola. Analytical and graphical geometry were used. It is established that, in addition to the already known "inner" part, the parabola has three additional isogons: itself, its directrix, and branches of hyperbolas.

It is proved that these hyperbolic isogons pass through every point of the plane below the parabola (except for points on the directrix) and their location depends on the angle value. In particular, it is shown that for some angles the hyperbolic isogons have a common focus with the parabola, while for others their focuses are located on the ordinate axis. The work emphasizes the potential for further research on the relationship between the structure of isogons and other geometric properties of curves, and the results obtained can be used to study isogons of classical curves.

Keywords: *parabola isogonies, directrix, angle of inclination, tangent, line.*

Стаття надіслана: 08.08.2025 р.

© Бєлова М.О.